SULLA

NUOVA TEORIA

DEL

MOTO DELLE ACQUE

MEMORIA

DI

GIUSEPPE BRUSCHETTI

MILANO

DAI TIPI DI GIOVANNI BERNARDONI

1829

INTRODUZIONE.

Le leggi dell' equilibrio e del movimento dei corpi costituiscono il soggetto di tutti i trattati di meccanica che si conoscono e che sono appoggiati ai differenti principj della scienza. Fra gli altri istitutori di meccanica furono tre sommi maestri successivamente, Newton, Eulero, Lagrange; ma, com' è noto, lo scopo sublime di quest' ultimo fu inoltre quello di ridurre la teoria della scienza e l' arte di risolverne i problemi a poche formole generali derivate tutte dall' unico principio delle velocità virtuali. *La* Meccanica Analitica *di Lagrange venne quindi a raccogliere come in un sol quadro tutti i lumi della scienza, ed a comprendere in una sola formola generalissima tutti gli equilibrj e tutti i movimenti dei corpi che si possono immaginare e considerare. Volendo però passare dall' alto della teoria contenuta nella* Meccanica Analitica *alle diverse pratiche applicazioni per gli usi sensibili della vita e per i bisogni ordinarj della società, farebbe d' uopo di poter in ogni caso discendere a queste applicazioni coll' effettuare lo sviluppo delle formole lagrangiane sino agli ultimi dettagli della loro verificazione in natura.*

Ora succede molte volte nello sviluppare le dette formole lagrangiane che si arrivi ad equazioni le quali per difetto d' analisi non si sanno integrare ancorchè si possano liberare dalle quantità arbitrarie di cui si trovano affette. Di qui ne proviene adunque che per un gran numero di casi non ha luogo il desiderato ravvicinamento della teoria alla pratica. Un altro ostacolo al conseguimento dello stesso fine è poi anche la poca o niuna cognizione che si ha di molti dàti fisici, *i quali entrano necessariamente nella*

valutazione degli effetti naturali che si considerano, e perciò nelle equazioni dei problemi che si tratta di risolvere. Talvolta basta ad impedire ogni ulteriore progresso verso la soluzione di un problema importante la sola mancanza di alcuno di questi dati che sia d' altronde indispensabile per assicurarsi dell' andamento del calcolo e delle vere proprietà dei corpi in equilibrio od in moto. Generalmente però egli è in causa dell' accennata difficoltà di doppio genere che nemmeno le formole della Meccanica Analitica *non possono fornire l' esatta e compiuta soluzione dei problemi nei varj rami della scienza.*

A questa regola fanno appena eccezione alcune formole relative all' Astronomia, all' Ottica ed a qualche altro dei più semplici rami della scienza. Potendosi in questi rami determinare il valore dei dati fisici che si richiedono per porre, come si dice, in equazione i relativi problemi; egli è più probabile di arrivare coll' analisi lagrangiana alla loro esatta soluzione sino a comprovare una bastante corrispondenza dei risultamenti del calcolo coi fatti della natura. Ma ciò è appunto quello che nello stato attuale delle nostre cognizioni esperimentali e matematiche non si saprebbe sperare di ottenere per altri rami meno semplici della meccanica universale. Segnatamente per la soluzione dei problemi attinenti all' idraulica ed alla meccanica ordinaria si fa maggiore il numero dei dati fisici, e finora le ben accertate osservazioni ed esperienze che potrebbero servir di guida nella loro determinazione sono troppo scarse perchè legandole col ragionamento e coll' analisi debbano bastare all' uopo nella generalità dei casi più importanti. D' altronde la giusta stima di tali dati può appena formare lo scopo lodevole e la speranza lontana dei coltivatori della scienza che si troveranno forniti dei mezzi opportuni e situati sotto favorevoli auspicj per istituire le necessarie serie di osservazioni e di esperienze; se non che per la rigorosa e compiuta soluzione di qualche problema relativo agli stessi importantissimi rami della scienza non mancavano forse i dati, oppure erano facilmente conseguibili da chicchessia, per cui l' applicazione delle formole di Lagrange in questi casi pratici non offriva più che delle difficoltà d' analisi. In generale poi tali difficoltà di analisi diventando anch' esse superabili di mano in mano che si va perfezionando questo grande stromento dei geometri, toccava probabilmente agli allievi del Lagrange ed ai nostri tempi l' onore della soluzione di importanti problemi di idraulica e di meccanica. Alla Nazione Italiana, come patria

dell' immortale Lagrange, spettava più specialmente la gloria di entrare per la prima in questo nuovo campo e di cogliervi abbondanti frutti.

Quindi bene si addiceva all' Istituto delle Scienze di Milano il rendere un pubblico omaggio al sommo merito di quel grande italiano per aver prodotto l' aureo libro della Meccanica Analitica, *ed il dare nello stesso tempo il nobile eccitamento di qualche premio al genere di sforzi e di ricerche che tende a spingere la sublime teoria del Lagrange alle più utili applicazioni della pratica negli anzidetti due rami della scienza, cioè d' idraulica e di meccanica ordinaria. Ora da quel Corpo scientifico per il concorso al premio dell' anno 1824 è appunto stato proposto il quesito in cui si dimandava* un' applicazione dei principj contenuti nella *Meccanica Analitica* di Lagrange alla soluzione dei principali problemi di meccanica e di idraulica, dalla quale apparisca la mirabile speditezza ed utilità dei metodi lagrangiani. Si desidera che i concorrenti discendano a qualche pratica applicazione.

Con tali espressioni l' Istituto ha lasciato all' arbitrio dei concorrenti la scelta delle questioni principali da trattarsi. Così per rispondere alla dimanda dell' Istituto si poteva primieramente far cadere tale scelta sulle questioni di pura meccanica che risguardano l' azione dei corpi solidi e gravi tra di loro; se non che istituendo sulle tracce del Lagrange il calcolo per metterle in equazione, ed avanti di cimentarsi collo sviluppo delle relative formole, si rendeva assolutamente necessario di saper valutare fra gli altri effetti naturali la resistenza d' attrito, la rigidezza delle particelle e la tenacità dei solidi.

In secondo luogo poteva darsi la preferenza a quel genere di questioni che chiameremo miste *di meccanica e di idraulica, ed in cui i fluidi agiscono sopra i solidi e viceversa, per gli altri effetti della* resistenza dei mezzi, *dell'* aderenza, *della* filtrazione *e simili. Ma anche qui diventava necessario di determinare col rigor geometrico la* sensibile *modificazione arrecata dalle accennate cause secondarie alle leggi universali di meccanica.*

In terzo ed ultimo luogo la scelta del soggetto principale della risposta al quesito dell' Istituto si poteva fare nelle questioni che si riferiscono esclusivamente all' idraulica ed alla teoria dei fluidi. In tal caso vi era almeno qualche maggiore probabilità di poter dare l' esatta e compiuta soluzione di importanti problemi che fosse suscettibile da una parte di legame coi principj del Lagrange e dall' altra di sviluppo sino agli ultimi termini della pratica

applicazione. Difatti hanno i fluidi la proprietà delle loro particelle estremamente mobili e slegate, per cui si è potuto prima d' ora considerarli in una maniera più astratta e più semplice dei solidi, e risguardarli come corpi opponenti assai minori ostacoli all' esattezza dei risultamenti che offrono i rigorosi principj della scienza meccanica; vale a dire si è potuto prima d' ora trattare l' idraulica indipendentemente dagli effetti di attrito e di adesione e dalle altre azioni che si esercitano in modo più sensibile tra i solidi gravi. Negli scorsi secoli le considerazioni degli idraulici e dei matematici italiani intorno al movimento delle acque non si limitarono ad enunciare il semplicissimo teorema del Castelli, che nei canali e nei fiumi la velocità è in ragion inversa delle sezioni; *nè le loro considerazioni si restrinsero ad indicare la* ragione delle radici delle altezze d'acqua soprastante *per la legge che segue il moto dell'acqua nell' efflusso dai piccoli fori praticati nelle pareti dei vasi. Neppure si ridussero quei primi maestri coi loro tentativi a scoprire per via di esperienze la legge ossia* scala delle velocità *nei diversi punti delle sezioni dalla superficie al fondo in una data corrente d' acqua. Il gran Galileo sottopose in qualche modo a calcolo anche il movimento delle acque nei canali e nei fiumi, applicandovi la legge della discesa dei gravi da lui medesimo scoperta. Allora dagli uni si paragonò un tal movimento delle acque a quello di altrettante piccole particelle solide che per la propria gravità discendono sopra piani inclinati. Dagli altri si suppose che la velocità dell' acqua prodotta dall' inclinazione del letto venisse necessariamente aumentata dalla pressione che le particelle inferiori provano da parte delle superiori. Secondo i primi si ammetteva la semplice* ragione delle altezze *per la scala delle velocità nei differenti punti dell' altezza di una stessa sezione della data corrente. Secondo gli ultimi invece si riteneva per la stessa legge la ragione* delle radici delle altezze *già osservata nell' efflusso dell' acqua per i piccoli fori praticati nelle pareti dei vasi. Così in un modo o nell' altro, sebben sempre in modo alquanto ipotetico e parziale, si giungeva a valutare la modificazione che soffre la legge della caduta dei gravi quando viene applicata al moto delle acque correnti.*

Più precisamente il Guglielmini, nello stabilire i principj delle celebri sue opere d' idraulica, partì dalla supposizione che la velocità dell' acqua in una data sezione del canale inclinato all' orizzonte fosse la stessa che se il fluido scorresse da un vaso per un orifizio simile in figura, di sezione eguale

e tanto lontano dalla superficie dell' acqua nel vaso quanto lo è la considerata sezione del canale dalla linea orizzontale che passa alla sua origine *in superficie della stessa acqua. Per tal modo Guglielmini faceva dipendere tutta la dottrina delle acque correnti dalle leggi osservate sull' efflusso dell' acqua dai vasi. Col mezzo poi di alcune osservazioni ed esperienze fatte direttamente sul corso dell' acqua nei canali e nei fiumi tentò egli di stabilire e confermare la stessa sua dottrina, come si dice* a posteriori, *dichiarandola applicabile a tutti i casi sul moto dell' acqua. In seguito il Grandi, nella sua opera* del movimento delle acque, *in vista della real perdita notabile di velocità che si verifica nel corso dei fiumi di mano in mano che discendendo si allontanano dalla loro* origine, *qualunque poi sia la causa di una tal estinzione di velocità che più comunemente si crede essere la resistenza del letto del fiume al corso dell' acqua, introdusse la sua ipotesi della* origine equivalente *della caduta dell' acqua, per sostenere in qualche modo la teoria delle velocità e delle tavole paraboliche data dal Guglielmini; cioè in luogo di considerare col Guglielmini questa velocità come dipendente dall' altezza viva verticale dall' origine del fiume sino al punto in superficie della data sezione, la stimò invece proporzionale all' altezza che compete alla velocità attuale che realmente si trova allo stesso punto della superficie dell' acqua nella sezion data. Finchè però un tale sistema idraulico tenne il luogo della vera teoria delle acque correnti, anche le formole che lo rappresentano si ebbero per fedeli espressioni dei più famigliari fenomeni sul corso delle acque.*

Nel dare cogli accennati principj una certa quale spiegazione fisica di questi fenomeni si fece dapprima astrazione da ogni altra causa di moto differente dalla gravità. In seguito gli idraulici italiani hanno avuto ricorso alla resistenza d' attrito e d' aderenza dei fluidi coi solidi che li contengono, alla viscosità delle particelle fluide fra di loro e ad altre consimili cause secondarie e perturbatrici del moto, affine di sostenere l' edifizio di scienza idraulica già innalzato dai primi autori. Così qualunque fossero le aberrazioni e le anomalie del sistema al confronto della natura delle acque correnti, si arrivava sempre a spiegare in qualche maniera anche i fenomeni che all' atto di nuove osservazioni ed esperienze non si accordavano abbastanza bene coi principj d' altronde ingegnosi del Galileo, del Castelli, del Torricelli, del Guglielmini, del Grandi e degli altri nostri primi maestri ed autori di idraulica.

Nello scorso secolo si è pur tentata la determinazione a priori *delle leggi osservate sull' efflusso dell' acqua dei vasi, leggi che vennero realmente dimostrate in qualche caso particolarissimo e richiamate ai principj di meccanica universale col favore dell' ipotesi speciale del* moto lineare. *Questa ipotesi, come si sa, consiste nell' ammettere che il moto dell' acqua segua esattamente la direzione di una data linea e che le loro sezioni normali a questa linea conservino sempre il loro parallelismo. Sopra la stessa ipotesi si appoggiano unicamente i trattati dei fluidi di tanti celebri scrittori che nello scorso secolo hanno fiorito non solo in Italia, ma in diverse altre parti d' Europa, e le loro formole sono realmente esatte, rigorose ed applicabili alla compiuta soluzione dei problemi che si offrono sul moto di un filo capillare di acqua. Ma all' infuori della soluzione di questo caso del fluido che abbia le dimensioni infinitamente piccole, ben poco o nessun vantaggio poteva recare l' accennata teoria del moto lineare dei fluidi per le applicazioni della pratica. Segnatamente non bastava da sè sola l' ipotesi del moto lineare a determinare il moto di una massa considerabile di acqua ed a spiegare i principali fenomeni del corso dell' acqua ne' più comuni casi di natura; talchè per adattarla in qualche modo a questa spiegazione i geometri hanno dovuto combinarla con altre ipotesi e con altri principj dedotti da particolari considerazioni. Quindi in mancanza della vera teoria dei fluidi sono stati condotti gli idraulici ad introdurre un' altra volta nel calcolo, oltre l' azione della gravità, quella della resistenza d' attrito, dell' aderenza e della viscosità delle particelle, con altre simili cause. Generalmente si è pur anche stabilita l' opinione che gli effetti di queste cause secondarie del moto delle acque entrino a modificare sensibilmente il principale effetto della gravità. Battendo poi la via sperimentale, si sono combinati i risultamenti di molte esperienze colla predetta ipotesi del moto lineare e con qualche altra sulla legge di resistenza del fondo e delle pareti dei recipienti. Usando in ispecie del calcolo non si è tardato ad arrivare a formole idrometriche più empiriche che teoriche, ma pur tali che rappresentano discretamente bene un certo numero di esperienze, e quindi sono applicabili con vantaggio alla pratica cognizione del moto e della misura delle acque correnti in tutti i casi posti in parità di circostanze.*

Ora è bensì vero che gli astronomi battendo la stessa strada conobbero dapprima i movimenti dei pianeti per via di tavole dedotte dalla serie di

molte e molte osservazioni, dalle quali poscia il Klepero ricavò la figura delle orbite loro, ed appresso il Newton la legge delle forze che in quelle orbite li ritiene. Egli è vero del pari che sarà sempre utile per l'idraulico pratico la moltiplicazione delle esperienze e l'uso delle relative formole idrometriche che le rappresentano e che sono sinora dovute al Mariotti, al Du-Buat, al Bossut, al Bernard, al Girard, al Prony, all'Eytelwein, al Bidone, al Venturoli ed a pochi altri. Ma di qui non è egualmente sperabile, come già si è detto di sopra, che il geometra sperimentatore abbia presto da poterne ricavare alcuna legge fondamentale per la teoria dei fluidi e per il corso delle acque. Difatti la scienza idraulica essendo meno semplice dell'astronomia, avrà probabilmente una legge teorica fondamentale più composta; nè in realtà seguendo l'anzidetta strada indiretta si è poi avanti di un sol passo verso la rigorosa e compiuta soluzione del problema idraulico che apre il campo alla vera teoria dei fluidi. Che anzi per la presupposta considerabile influenza delle resistenze, il problema della determinazione del moto dei fluidi si trovava come ridotto a quello di determinare il movimento di un sistema di piccoli corpi sollecitati dalla gravità e da altre forze agenti con leggi e secondo direzioni sconosciute.

Da ciò ebbe origine presso alcuni periti d'acque l'opinione che ormai siano inutili tutti gli sforzi dei più esperti geometri per determinare a priori *il moto e fondare la teoria delle acque correnti e degli altri fluidi colle semplici e sicure leggi della meccanica universale. Dalla stessa considerazione se ne trasse per necessaria conseguenza che non si possano assolutamente coi principj della scienza intavolare ricerche di questo genere senza o formare delle pure ipotesi o servirsi di altri principj indiretti onde comporre alcune formole empiriche simili alle già conosciute ed applicabili soltanto con vantaggio discreto alla soluzione dei casi pratici* (*). *Nondimeno da altri geometri dello scorso secolo essendosi abbandonate le vecchie ipotesi*

(*) *Così è asscrito specialmente nel libro che porta per titolo:* Noveaux principes d'Hydraulique par Bernard ecc. *A tal riguardo la Società Italiana delle Scienze propose nel 1804 un premio a chi meglio ed interamente si farà ad investigare quanto siano solidi e giusti i principj ai quali appoggiò la sua teoria idraulica il sig. Bernard fin dal 1787; ma questa teoria essendo stata esaminata in Italia dianzi dal Bonati e poscia dal sig. Tadini fu trovata non meno insussistente delle altre succennate. — Vedi le* Memorie *della stessa Società Italiana, Tom. XI, e l'Annotazione I.ª all' opera del sig. Tadini intitolata:* Del movimento e della misura delle acque correnti.

si è invece atteso a stabilire e formare le equazioni generali e fondamentali del moto di una massa considerabile di acqua. Quindi la rigorosa determinazione di questo moto non dipendeva più che dal succennato sviluppo di siffatte equazioni e dall' ulteriore loro applicazione ai casi pratici. La natura dei fluidi suggeriva il modo di semplificare lo stesso sviluppo, considerando il moto dell' acqua indipendentemente dall' effetto delle resistenze d' attrito, di aderenza, di viscosità e di ogni altra causa di sua perturbazione.

Nel caso particolare dell' acqua scorrente in un vaso o canale di uniforme larghezza facendosi il suo movimento semplicemente in due direzioni ossia in un piano, si poteva in tal caso riferire il moto a due sole coordinate. Questa circostanza rendendo più semplice ed integrabile l' equazione principale del movimento, facilitava alquanto la soluzione del problema che abbraccia un ramo importante della teoria delle acque correnti. Prima però della pubblicazione della Meccanica Analitica *non si era ancora dai geometri additato alcun caso teorico completamente solubile, vale a dire alcun caso che legandosi ai generali principj della scienza ammettesse una compiuta integrazione dell' equazione dei fluidi sino a dare delle formole rigorose applicabili ai casi pratici sul moto dell' acqua. In una Memoria coronata dall' Accademia di Mantova l' anno 1781 si era bensì tentato di scoprire nella teoria dei fluidi qualcuno di questi casi solubili; ma dopo alcuni lodevoli sforzi per giungere allo scopo, si è ivi finito col dichiarare di aver perduta ogni speranza di conseguirlo* (*).

L' immortale Lagrange nella sua Meccanica Analitica *ha ridotto i fluidi al loro vero concetto considerandoli come composti di un' infinità di particelle slegate e perfettamente libere. Inoltre vi ha esposte e dimostrate, in un modo più semplice e più elegante del conosciuto e seguito comunemente, le equazioni fondamentali del loro moto, e vi ha indicato un metodo per arrivare in qualche caso alla desiderata determinazione del moto dell' acqua. Lo stesso Lagrange ha pure il merito di aver applicato tale metodo alla soluzione diretta e compiuta del caso del movimento di un fluido incompressibile che scorre in un vaso assai ristretto e quasi verticale. Questo primo*

(*) Coccoli. *Dissertazione sopra il quesito:* Stabilire la vera teoria delle acque uscenti da fori aperti nei vasi, e mostrare in quali circostanze si possa ella applicarsi alle acque correnti negli alvei naturali. — *Mantova* 1783.

caso rientra evidentemente in quello del moto lineare. Per dare un secondo esempio di applicazione dello stesso metodo, egli ha pur considerato il movimento del fluido incompressibile in un canale poco profondo e quasi orizzontale; ed ha risolto un primo caso assai semplice del movimento delle onde. Toccò quindi ad alcuni altri italiani l'onore di innalzarsi sulle tracce del Lagrange alla soluzione di casi più utili nella teoria delle acque correnti. Si deve segnatamente al sig. Venturoli ed al sig. Tadini di essere entrati per i primi in questo nuovo e scabroso sentiero e di avervi segnato un passo importante colla soluzione esatta e compiuta del problema nel caso dell'acqua che si muova entro vasi o tubi di data figura parallelepipeda. Spetta più specialmente al sig. Tadini la gloria di aver ricavato da questa soluzione molte conseguenze utili per la pratica, e fra le altre la bella idea del nuovo regolatore a moto lineare da lui immaginato e proposto per la dispensa a giusta misura e per l'esatta distribuzione delle acque correnti. Dal canto suo il sig. Venturoli non ha tardato a risolvere compiutamente il caso teorico del movimento dell'acqua che scorre entro vasi di figura conica. Non è guari poi che il sig. Mossotti nella sua Memoria inserita nel tom. XIX *fra quelle di matematica della Società Italiana delle Scienze ha risolto alcuni altri problemi che si riferiscono più immediatamente al moto dell'acqua nei canali.*

D'altronde illustri geometri si occupavano contemporaneamente di due altre questioni importanti d'idraulica che si legano ai principj generali della Meccanica Analitica *di Lagrange; così la soluzione del caso sul moto dei fluidi, che abbraccia la teorica del flusso e riflusso del mare, ha fatto a quest'ora notabili progressi specialmente in Francia fra le mani del celebre Laplace. La bella Memoria sulla teoria delle onde del sig. Poisson venne pure dalla Francia a fornirci la soluzione esatta e compiuta dei problemi più interessanti di codesto movimento dell'acqua sì comune e famigliare. Finalmente il sig. Piola nella sua Memoria premiata in risposta al suddetto quesito dell'Istituto di Milano ha mostrato esistere qualche altro caso teorico del moto dell'acqua che ammette un'elegante soluzione.*

Per tal modo gli idraulici matematici de' nostri giorni sono incamminati sulla vera strada della teoria dei fluidi, ed hanno dimostrata la possibilità e l'utilità di applicare all'idraulica i principj e le formole contenute nella Meccanica Analitica *di Lagrange. Non sembrerà quindi nè del tutto inutile*

nè fuor di luogo nè intempestivo il riunire e ravvicinare fra di loro, come faremo nella presente Memoria, le principali formole relative alle più importanti soluzioni sul moto dell' acqua che si ricavano dalla Meccanica Analitica *di Lagrange e che si trovano sparse in varie opere dei sullodati autori o nelle raccolte scientifiche dei differenti paesi.*

Lusingandoci poi anche noi di aver dedotto dagli stessi principj e dalle stesse formole la soluzione di qualche caso o problema non per anco considerato sul moto dell' acqua nei canali, cogliamo volontieri la presente occasione per esporla al giudizio degli intelligenti. Del resto il campo è abbastanza fecondo e si trova aperto a tutti i coltivatori della scienza idraulica; per cui altri probabilmente si incontreranno in nuovi ed utili casi teorici che ammettono soluzione esatta e compiuta sino ai più minuti dettagli della pratica applicazione. Altri ancora avranno opportunità di fare osservazioni sopra grandi canali, e potranno presto fornire un buon numero di esatte esperienze onde decidere se tutti i risultamenti della stabilita teorica, che sono indipendenti dall' azione delle resistenze, tornino sempre in conferma di quelli della natura, oppure se sia per ciò indispensabile di ricorrere all' anzidetto elemento delle resistenze e di introdurlo nel calcolo come elemento essenziale del moto dell' acqua. Così è almeno sperabile che col tempo e coll' uso della Meccanica Analitica *del Lagrange si giungerà a conseguire la soluzione dei principali problemi d' idraulica.*

FORMOLE GENERALI DI LAGRANGE
PER IL MOTO DELL'ACQUA

La *Meccanica Analitica* di Lagrange ci fornisce nella Sezione XI i principj e le formole più generali e più semplici per la esatta determinazione del moto delle acque. Partendo dunque da tali principj e formole lagrangiane come da punti fissi abbastanza noti, assumeremo per dimostrate le equazioni fondamentali di un tal moto che si trovano contenute nell'anzidetta Sezione della *Meccanica Analitica*, e ci occuperemo in questa Memoria degli ulteriori sviluppi che si richiedono per poterne fare alcune applicazioni alla soluzione dei problemi d'idraulica. Veramente non si ottiene rigorosa e compiuta siffatta soluzione che per certi casi particolari del movimento delle acque; ma intanto si possono applicare con vantaggio alla pratica le formole teoriche ottenute in questi casi finora risolti nella considerazione delle acque che si muovono entro vasi, tubi e canali.

Per maggior semplicità supporremo col Lagrange che l'acqua corrente sia omogenea, grave e fornita di perfetta fluidità. Ritenute poi le denominazioni della *Meccanica Analitica*, il moto dell'acqua che noi considereremo nel seguito della presente Memoria sarà per lo più quello che si adatta alla nota condizione che suppone un differenziale esatto la quantità $pdx + qdyr + dz$, notando con p, q, r le velocità di un punto qualunque del fluido secondo gli assi delle x, y, z. Questa condizione che vale a far prendere alle equazioni

fondamentali del problema una forma assai più semplice della loro originaria e primitiva, come è noto, si verifica in molti casi se non a stretto rigore almeno con bastante approssimazione per i principali bisogni della pratica (*). Le formole che ne ha ricavato Lagrange possono quindi riguardarsi come fedeli espressioni di comuni ed ordinarj movimenti delle acque. Essendovi però in natura altri casi solubili senza essere ristretti da una tale condizione, noi non tralasceremo di accennarli e di abbracciarli nella presente occasione per dare un saggio di tutti i casi utili fin qui risoluti nella teoria del moto delle acque che si fonda sulla *Meccanica Analitica* di Lagrange.

Ora stando generalmente al problema del moto dell' acqua limitato dall' anzidetta condizione, ed essendo φ una funzione di x, y, z e t determinata dalla seguente equazione

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

si hanno primieramente per le velocità di ciascuna particola fluida secondo le direzioni delle coordinate x, y, z le espressioni

$$p = \frac{d\varphi}{dx} \qquad q = \frac{d\varphi}{dy} \qquad r = \frac{d\varphi}{dz}$$

e quindi per la pressione λ di un punto qualunque del fluido la quantità

$$\lambda = V + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2$$

la quale dev' essere nulla all' esterna superficie libera del fluido. Il valore di V nell' espressione di λ dipende dalle forze acceleratrici del fluido in moto; se si esprime con g la forza acceleratrice della gravità e si chiamino ξ, η, ζ gli angoli che gli assi delle coordinate x, y, z fanno colla verticale condotta dal punto d' intersezione di questi assi e diretta da alto in basso, si ha dall' art. 23 della Sez. XI.

$$X = -g\cos\xi \qquad Y = -g\cos\eta \qquad Z = -g\cos\zeta$$

prendendo col segno $-$ i valori delle forze, X, Y, Z perchè queste nelle formole lagrangiane sono supposte tendenti a diminuire le coordinate x, y, z. Dunque, poichè $dV = Xdx + Ydy + Zdz$, si avrà integrando

$$V = -gx\cos\xi - gy\cos\eta - gz\cos\zeta.$$

(*) Vedi gli art. 15 e segg. della Sez. XI, ed i paragrafi 28 e segg., oltre l'annot. 4.ª in fine dell'Opera del sig. *Tadini* che ha per titolo *Del movimento e della misura delle acque correnti*. Milano 1816.

Sia dato $z = \alpha$ per l'equazione di una superficie estrema del fluido, essendo α generalmente una funzione di x, y, t senza z. Perchè le stesse particelle di fluido che arrivano una volta su questa superficie vi stieno sempre aderenti e non si muovano che al lungo della medesima, bisognerà soddisfare all'equazione esprimente una tal condizione ricevuta comunemente, e che anche a Lagrange sembrava necessaria acciò il fluido in moto non si divida rompendo la sua continuità. Si avrà quindi per gli art. 12 e 24 della Sez. XI

$$\frac{d\varphi}{dz} - \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\alpha}{dt} = 0$$

e quest'equazione dovrà essere soddisfatta dal valore $z = \alpha$. Ciascuna data parete o linea estrema del fluido fornisce un'equazione consimile.

Del pari essendo $\lambda = 0$ l'equazione della superficie esteriore e libera del fluido, affinchè restino costantemente a questa superficie le stesse particelle dovrà per i succitati art. 12 e 24 sussistere l'equazione

$$\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{d\lambda}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{d\lambda}{dz} = 0$$

la quale dovrà aver luogo contemporaneamente coll'equazione $\lambda = 0$ e dare per conseguenza uno stesso valore di z.

Ciò posto non si ha che a determinare la funzione φ per ottenere i valori di tutti gli elementi del moto considerato; ma l'equazione da cui dipende la φ non è generalmente integrabile in termini finiti con alcun metodo conosciuto. Converrà pertanto ricorrere a qualche altra restrizione del problema che faciliti e renda possibile la determinazione della funzione φ. Così talvolta gioverà far astrazione da qualcuna delle dimensioni della massa fluida, e quindi considerare unicamente il moto dell'acqua che ha luogo in un piano; tal'altra volta si dovrà supporre col Lagrange che una delle dimensioni della massa fluida sia assai piccola in confronto delle altre due. Restando poi nell'espressione di φ qualche funzione arbitraria, la forma di questa si dovrà dedurre in parte dallo stato iniziale del moto ed in parte della considerazione della superficie esteriore e libera del fluido.

CAPO I.°

Formole sul moto dell' acqua nei vasi e nei tubi.

Il metodo fondato sulle serie che si trova esposto agli art. 25, 26 e 27 della succitata Sez. XI venne specialmente applicato dallo stesso Lagrange alla soluzione di alcuni casi particolari del movimento delle acque nei vasi e nei tubi. Un caso da lui considerato è quello del così detto *moto lineare* dell'acqua scorrente in un vaso o tubo assai ristretto e quasi verticale. La soluzione che ne ottenne e che si può riscontrare agli art. 28-34 della detta Sezione si trova conforme a quelle pel medesimo caso dovute ai primi autori che hanno trattato del moto delle acque dietro la supposizione che i differenti strati del fluido discendendo nel vaso o tubo conservino esattamente il loro primitivo parallelismo. Siccome poi l'esperienza ci dimostra l'insufficienza di tale ipotesi pel caso delle considerevoli masse d'acqua che si muovono in un dato recipiente, così l'analisi del Lagrange pel detto caso fa vedere che la supposizione non è esatta se non quando l'altezza del vaso o tubo è infinitamente piccola, ma ad ogni modo ci insegna che può essere impiegata per una prima approssimazione e che le soluzioni che ne risultano sono esatte nei limiti delle quantità di secondo ordine, riguardando la larghezza del vaso o tubo come quantità di prim'ordine. Il gran vantaggio però dell'analisi lagrangiana, anche in questo caso puramente ipotetico, è che per di lei mezzo si può avvicinarsi più e più al vero movimento dei fluidi nei vasi e nei tubi, giacchè avendo trovati i primi valori delle incognite, trascurando le seconde dimensioni delle altezze del vaso, diveniva possibile collo stesso andamento di calcolo di spingere l'approssimazione più lungi, avendo successivamente riguardo ai termini trascurati. Ma se varia la velocità da un punto all'altro del fluido, la semplice teoria del moto lineare non varrebbe perchè non si potrebbe sempre prescindere in ispecie dall'azione della gravità nel senso normale alla direttrice del moto, essendo anzi quest'azione la causa principale dei fenomeni inerenti ai più ordinarj e comuni corsi d'acqua. Quindi è che per accordare in qualche modo la teoria del *moto lineare* coll'esperienza ossia colla *scala* delle velocità osservate, prima di stabilire una teoria più rigorosa che tenga conto dell'azione della gravità nelle varie direzioni del moto dell'acqua, si introdusse da alcuni, come è noto, la con-

siderazione delle *resistenze* d'attrito, d'adesione e simili che si suppongono agir disugualmente su tutti i punti di una stessa sezione del fluido, ed inoltre si potrebbe forse ricorrere qui anche all'idea nuova del *moto ondeggiato* e dell'*ondeggiamento* per ispiegare come in natura si modifichi l'effetto della gravità dell'acqua desunto dalla teoria del moto lineare, e procurare un certo qual accordo di questa coll'esperienza.

Un altro esempio di soluzione dato dal Lagrange si riferisce al moto dell'acqua in un vaso o bacino poco profondo e quasi orizzontale. Esso si applica più specialmente al movimento delle onde, che si formano quando si agita l'acqua in un punto della sua superficie, che si propagano circolarmente attorno di un centro comune, e che sono dovute alle piccole elevazioni ed agli abbassamenti successivi del fluido al disopra ed al disotto del suo livello naturale. Questo fenomeno è uno de'casi più semplici del movimento dei fluidi, ed uno dei primi che si presentino alla contemplazione dei geometri.

Ora seguendo il calcolo del Lagrange, riferito agli art. 35 e 36, nel supposto che si possa rappresentare il valore di φ per una serie di questa forma $\varphi = \varphi' + z\varphi'' + z^2\varphi''' + z^3\varphi'''' +$ ec., in cui $\varphi', \varphi'', \varphi'''$ ec. siano funzioni di x, y, t senza z, si arriva per il movimento delle onde nel caso del bacino poco profondo e quasi orizzontale all'equazione fondamentale

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - g\,\frac{d\,.\,\alpha\,\frac{d\varphi'}{dx}}{dx} - g\,\frac{d\,.\,\alpha\,\frac{d\varphi'}{dy}}{dy} = 0$$

da cui dipendono le espressioni $z = \frac{d\varphi'}{g\,dt}$; $\quad p = \frac{d\varphi'}{dx}$; $\quad q = \frac{d\varphi'}{dy}$

L'anzidetta equazione lineare contiene la teoria generale delle piccole agitazioni di un fluido poco profondo, omogeneo, incompressibile e pesante; per conseguenza contiene la vera teoria delle onde formate dalle elevazioni ed abbassamenti successivi ed infinitamente piccoli di un'acqua stagnante in un bacino poco profondo. Nel supposto poi che il bacino abbia il fondo orizzontale α sarà costante ed eguale alla profondità dell'acqua, per cui l'equazione del moto diverrà

$$\frac{d^2\varphi'}{dt^2} = g\alpha\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d^2\varphi'}{dy^2}\right)$$

ma non ostante questa semplificazione del problema non si poteva ancora dedurne in una maniera soddisfacente la teoria delle onde e la legge delle

relative oscillazioni. Riducendosi finalmente col Lagrange al caso semplicissimo in cui si considera nella massa del fluido una sola dimensione e prendendo l'asse delle x su questa linea, la funzione φ' non conterrà punto y e l'equazione dell'acqua ondeggiante si ridurrà

$$g\alpha \frac{d^2\varphi'}{dx^2} = \frac{d^2\varphi'}{dt^2}$$

cioè sarà simile a quella *delle corde vibranti,* ed avrà per integrale completo

$$\varphi = \Upsilon \, (x + t\sqrt{g\alpha}) + \Omega \, (x - t\sqrt{g\alpha})$$

denotando colle caratteristiche Υ, Ω due funzioni arbitrarie. Determinando poi convenientemente queste funzioni si arriva col Lagrange ad ottenere la soluzione esatta e compiuta del problema in un tal caso del movimento delle onde che è il più semplice di tutti. Secondo questa soluzione lagrangiana le onde si propagano in un filetto d'acqua di una larghezza verticale costante con una velocità indipendente dalla scossa primitiva e proporzionale alla radice quadrata di tale larghezza. (*vedi l'art.* 9 *della Sez. XII della* Mecc. Anal.)

Quindi sopra queste tracce dell'immortale Lagrange alcuni idraulici italiani s'inoltrarono alla soluzione di qualche caso più importante della teoria delle acque correnti. Abbandonata perciò l'ipotesi del moto lineare si ridussero eglino a far astrazione da una sola delle tre coordinate a cui si riferisce generalmente il moto dell'acqua nello spazio. Di tal maniera si veniva a considerare il moto dell'acqua in un piano, restava determinato con due sole coordinate il sito di ciascuna particella di fluido, riusciva più facile la valutazione degli elementi del moto delle acque e diventavano più semplici, più maneggevoli e più suscettibili di sviluppo le relative formole lagrangiane. D'altronde, come è facile a persuadersi, non è questa un'ipotesi tanto limitata e tanto sterile per la pratica, quanto lo è quella del così detto moto lineare dei fluidi che riduce il movimento ad un sol filo d'acqua. Nei vasi e nei tubi di uniforme larghezza l'acqua si muove appunto per due versi soltanto, non potendo le sue particelle deviare dal piano che forma la sezione longitudinale del recipiente.

Essendo pertanto x, z le due coordinate della particella qualunque di fluido, si avrà per la determinazione del suo moto in un piano la seguente equazione differenziale del secondo ordine

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

da cui si ricavano, come sopra, le espressioni

$$(2) \qquad p = \frac{d\varphi}{dx} \qquad\qquad r = \frac{d\varphi}{dz}$$

$$(3) \qquad \lambda = V + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2$$

Supponendo qui il caso che l'acqua scorra in un tubo o vaso di date pareti rettilinee comunque inclinate all'orizzonte, ed usando del succitato metodo per serie di Lagrange coll'avvertenza di prendere un'asse, p. e. quello delle x, sulla parete superiore del recipiente, e col tener conto dei termini successivi al primo nella determinazione della funzione φ si verrà a dare in una serie geometrica facilmente sommabile, e che colla sua somma manifesterà il valore di φ in termini finiti desunto direttamente dalla suddetta equazione differenziale (1); così anche in questo caso particolare del movimento dell'acqua fra due linee rette riuscirà il metodo preciso di Lagrange senza bisogno di aver ricorso all'integral completo dell'equazione del moto e senza necessità di mostrare la convergenza della serie usata per rappresentare la funzione φ.

D'altra parte la suddetta equazione differenziale del secondo ordine (1) ha per integrale completo secondo la comune dei geometri

$$(4) \qquad \varphi = \Psi\,(x + z\sqrt{-1}) + \Psi'\,(x - z\sqrt{-1})$$

denotando Ψ, Ψ' due funzioni arbitrarie che possono anche inchiudere in qualsivoglia modo il tempo t. Ottenuta così la funzione φ senza la considerazione delle serie, se ne deducono subito i valori di p, r, λ dalle surriferite espressioni. Difatti si segnino coi simboli F, f i coefficienti dei differenziali delle funzioni Ψ, Ψ' onde si abbia $d\ \Psi\ (x + z\sqrt{-1}) = (dx + dz\sqrt{-1})\ F\ (x + z\sqrt{-1})$, e $d\ \Psi'\ (x - z\sqrt{-1}) = (dx - dz\sqrt{-1})\,f\,(x - z\sqrt{-1})$, in cui essendo Ψ, Ψ' funzioni arbitrarie, lo saranno pure F, f. Di qui si offriranno dapprima i seguenti valori:

$$p = F\ (x + z\sqrt{-1}) + f\ (x - z\sqrt{-1})$$
$$r = \sqrt{-1}\ \{F\,(x + z\sqrt{-1}) - f(x - z\sqrt{-1})\}$$
$$p^2 + q^2 = 4\ F\ (x + z\sqrt{-1})\ f\ (x - z\sqrt{-1})$$
$$\lambda = V + \frac{d\varphi}{dt} + 2\,F(x + z\sqrt{-1})\,.\,f(x - z\sqrt{-1})$$

Dappoi per l'equazione generale della curva descritta da un punto qualunque

del fluido si avrà

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{-1} : \frac{F(x+z\sqrt{-1})-f(x-z\sqrt{-1})}{F(x+z\sqrt{-1})+f(x-z\sqrt{-1})}$$

ossia

$$\frac{dx - dz\sqrt{-1}}{dx + dz\sqrt{-1}} \cdot f(x-z\sqrt{-1}) - F(x+z\sqrt{-1}) = 0$$

Tutta la difficoltà del problema era dunque ridotta alla determinazione delle funzioni arbitrarie F, f; il che doveva conseguirsi col fissare alcuna particolare condizione del moto dell'acqua a cui si avesse da soddisfare. Così la condizione succennata che il fluido velo sia circoscritto nel vaso o tubo recipiente fra due linee rette, l'una delle quali formi il limite superiore e l'altra il limite inferiore dello stesso velo fluido, ha fornito agli idraulici le equazioni necessarie per la determinazione delle funzioni F, f da cui dipendeva la risoluzione compiuta di questo caso che risguarda uno de' più semplici movimenti dell'acqua in un piano. Il sig. Venturoli, usando di un metodo fondato sul calcolo delle differenze finite e prendendo l'asse delle x sopra il limite inferiore dell'acqua, ricavò pel primo una parte di tal soluzione; mentre egli sin dall'anno 1810, nel 3.° volume della seconda edizione de' suoi *Elementi di meccanica e d'idraulica*, ha dato per i valori di p ed r che contengono la determinazione della velocità del fluido in ciascun punto del velo le seguenti espressioni:

$$p = \frac{2Ax}{x^2+z^2} \qquad r = \frac{2Az}{x^2+z^2}$$

in cui A è una costante o piuttosto una funzione arbitraria del tempo. Pochi anni dopo avvenne che anche il sig. Tadini si propose il problema della determinazione del moto dell'acqua e risolvette con metodo differente il caso teorico del fluido circoscritto da due linee rette, ed in cui ogni stilla d'acqua ha velocità e direzione diversa da quella delle altre. Più precisamente il sig. Tadini prese a fondamento del suo calcolo l'integral completo dell'equazion differenziale del moto (1) assortito in quattro termini come segue:

$$\varphi = F(x+z\sqrt{-1}) + F(x-z\sqrt{-1}) + \frac{f(x+z\sqrt{-1})-f(x-z\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$$

indi colla condizione che il fluido nel suo movimento debba radere le pareti rettilinee del recipiente formò anch' egli le due equazioni per la determinazione delle funzioni F, f. Attenendosi poscia allo sviluppo in serie suggerito dal Lagrange procedette con lungo e penoso calcolo lo stesso sig. Tadini alla ricerca del primo, secondo e terzo termine dei valori di F, f, dopo il quale si manifestano tutti gli altri. Sommata quindi la serie geometrica che ne risulta e ridottala ad un sol termine finito, ei venne a conoscere tutti gli elementi del moto nel caso qui considerato, in cui cioè scorra il velo d' acqua fra sponde rettilinee parallele e fra due pareti superiore ed inferiore comunque inclinate all' orizzonte purchè rettilinee. Così il sig. Tadini nella prima parte della succitata sua Memoria, inviata nel 1814 alla Società Italiana delle Scienze e stampata nel 1816 in Milano, ci diede per i valori di p ed r della corrente di fluido circoscritta da superficie piane queste altre formole:

$$p=\frac{\chi}{\gamma}\cdot\frac{1}{1+\left(m\frac{a}{\gamma}+(n-m)\frac{z}{\gamma}\right)^2}; \quad r=\frac{\chi}{\gamma}\cdot\frac{m\frac{a}{\gamma}+(n-m)\frac{z}{\gamma}}{1+\left(m\frac{a}{\gamma}+(n-m)\frac{z}{\gamma}\right)^2}$$

dove χ è una funzione del tempo arbitraria, a denota una costante, m, n rappresentano le tangenti delle inclinazioni delle rette che formano i limiti del velo fluido coll' asse dell' x e $\gamma=a+(n-m)\,x$ esprime l' altezza dell' acqua nella sezione corrispondente all' ascissa x. Di qui il sig. Tadini ricavò ed espose nella prima parte della succitata sua Memoria i valori esatti per la velocità assoluta e per la pressione di un punto qualunque del fluido, e portò la soluzione compiuta del problema nel caso teorico da lui contemplato al grado di poter essere con tutta facilità applicata alla pratica. Ma si fu principalmente nella seconda parte della stessa Memoria che il sig. Tadini colse il frutto della teoria del moto delle acque stabilita nella prima, e confermò con una lunga serie di esperienze i risultamenti della stessa teoria.

In generale sebbene l' effetto di varie resistenze sia qui per semplicità trascurato, e sebbene la natural curvità della superficie esterna dell' acqua nei canali e nei fiumi si possa credere ancora poco o tanto opposta alle condizioni di questo calcolo del sig. Tadini relativo al moto dell' acqua nei vasi e nei tubi di figura parallelepipeda, pure esso calcolo vale bastantemente a dimostrare alcuni accidenti e fenomeni del corso ordinario dell' acqua negli stessi canali

e fiumi, perchè dà in ogni caso una certa corrispondenza ed offre un certo accordo tra i suoi risultati ed i fenomeni che sono già avverati in natura. Così prendendo ora nel senso verticale ed ora nel senso orizzontale le due linee rette che formano i limiti del velo fluido in movimento, si fece il sig. Tadini a considerare distintamente l'azione che l' obbliquità delle sponde e la pendenza delle linee estreme al fondo ed alla superficie dell' acqua esercitano alla varia distanza delle stesse sponde ed alla varia profondità sotto la stessa superficie nei canali e nei fiumi di figura regolare e pressocchè parallelepipeda. Quindi egli arrivò a spiegare bastantemente colle sue formole la formazione del filone nel caso che le sponde verticali del recipiente sieno oblique tra di loro, non che l'aumento sensibile di velocità che si osserva andando dalla superficie dell' acqua verso il fondo delle correnti quando il pelo sia molto declive come succede sotto gli archi dei ponti. Osservò inoltre il sig. Tadini che la pressione nelle acque correnti a misura che si va consumando si trasmuta in un doppio valore di discesa o forza viva, come pure che la forza viva nel consumarsi viene convertita o in pressione o in altezza viva negativa cioè in salita, o parte in una e parte in altra, e che viceversa nel crescere e riprodursi la forza viva o consuma altrettanto di pressione o genera in cambio altrettanto discesa o forza viva, ovvero consuma parte di quella e supplisce nel resto inducendo l'equivalente di questa. Dimostrò lo stesso sig. Tadini che *l'uso delle tavole paraboliche* introdotte per rappresentare le velocità dell' acqua corrispondenti a diverse altezze vive quanto è legittimo per la superficie libera di una corrente qual sarebbe p. e. alla sezione d' una cateratta per dove l' acqua sbocchi a libera cascata; altrettanto è illegittima l'applicazione fattane alle acque dei fiumi secondo la diversa profondità alla quale si trovano sommerse sotto la superficie suprema, da qui argomentandosi che la velocità dei fiumi crescesse come la radice dell' altezza d' acqua soprastante; mentre sotto la superficie di un fiume la pressione che soffrono le acque non è mai eguale a zero, siccome richiederebbe quella legge della parabola, ma anzi tanto più cresce quanto cresce la loro profondità e l' altezza dell' acqua soprapposta. Siccome poi nel calcolo da cui derivano queste deduzioni non è contemplata che quella resistenza, la quale nasce dalla semplice direzione del moto che il fluido deve seguire per adattarsi a secondare le sponde che lo contengono a norma della primitiva supposizione; così ebbe il sig. Tadini a far riflettere che è di genere affatto diverso la resistenza

che la corrente può incontrare per gli ostacoli disseminati sopra le pareti del recipiente, i quali convertendo il movimento regolare in onde irregolari tra di loro contrastanti, fanno sì che per essi una parte di velocità e di forza viva di cui le acque sono animate resta di netto distrutta senza che si cangi nè in salita nè in pressione, come fa quella che si estingue in virtù della semplice forma del recipiente. Tali sono le resistenze cui soggiacciono i fiumi a cagione delle scabrosità e degli impedimenti sparsi sopra il loro letto, onde veggiamo che sebbene essi abbiano elevatissime le origini, pure nei tronchi inferiori sono lontani dall'avere la velocità e la pressione a tanta altezza corrispondenti. Inoltre si può ricavare dal calcolo del sig. Tadini che l'acqua delle correnti alle sponde seconda perfettamente la direzion loro, non le urta, non isfoga contro di esse il loro impeto, per cui non ha luogo quivi nè angoli di incidenza, nè angoli di riflessione, nè percosse, nè botte che ora ascendano ora discendano secondo il comun linguaggio degli idraulici; ma ciò veramente si trova presupposto e non dimostrato dal calcolo del sig. Tadini, che è appunto istituito colla condizione che il fluido nel suo movimento lambisca le pareti del recipiente; e dall'essere questa una verità di fatto in molti casi, non ne viene di conseguenza che sia l'universale e necessaria condizione del movimento continuo di un fluido. Finalmente non è da tacersi che seguendo lo stesso metodo delle serie succennate il sig. Tadini ha determinato il primo ed il secondo termine dei valori di p, q, r pel moto dell'acqua ristretta fra quattro superficie di assai poca curvità o quasi piane, indipendentemente dalla solita condizione del differenziale esatto (*vedi la sua Memoria alla facc.* 247), come pure che ha calcolato il primo ed il secondo termine dei valori di p ed r pel moto dell'acque in un piano limitato da due linee in qualsivoglia modo curve ed assoggettato alla mentovata condizione del differenziale esatto (*vedi la Memoria Tadini a facc.* 250).

Del resto la misura delle acque correnti è stato l'oggetto precipuo delle applicazioni del sig. Tadini. A tale riguardo egli cominciò dal dare l'espressione analitica generale della quantità d'acqua scorrente in un vaso o tubo parallelepipedo comunque inclinato all'orizzonte; indi supposto il caso particolare del tubo disposto orizzontalmente, il calcolo gli ha additato verificarsi questa bella proprietà che *il corpo d'acqua corrente ha in ogni sua parte la medesima velocità e la medesima direzione;* cosicchè in tale disposizione del tubo, l'espressione della quantità d'acqua diventa molto semplice,

l'acqua per esso scorrente si misura come un solido parallelepipedo e si può dispensare con tutta facilità, astraendo però sempre dall'effetto delle resistenze trascusate nel calcolo del sig. Tadini. Ma noi avrem' occasione di parlare di quest' applicazione più di proposito nel seguente capo, giacchè la misura e la dispensa delle acque correnti di notabile quantità si fa più ordinariamente per gli usi comuni col mezzo di canali aperti anzichè col mezzo di tubi.

Appena pubblicata la Memoria del sig. Tadini, non essendo ancora palese l'identità del caso teorico da lui considerato con quello precedentemente risolto dal sig. Venturoli, si occuparono altri geometri di dimostrare che ai risultati del sig. Tadini si poteva pervenire con calcoli più compendiosi di quelli da lui usati, e segnatamente senza la considerazione di alcuna serie. Una di queste dimostrazioni era fondata sulla proprietà degli integrali definiti; un'altra invece si ottenne seguendo un metodo analogo a quello proposto dal sig. Venturoli e da lui usato particolarmente nel caso già risoluto ed accennato di sopra (*). A queste due dimostrazioni tennero dietro davvicino alcune osservazioni del sig. Tadini (**) tendenti a provare la superfluità della prima e l'insussistenza della seconda. L'opinione del sig. Tadini su di una tale insussistenza si fondava nel difetto da lui attribuito alla determinazione della costante arbitraria introdotta dall'integrazione a cui conduce il metodo del sig. Venturoli. Ma su questo punto riflettendo che tal costante arbitraria entra nel calcolo, con una funzione arbitraria del tempo e di altre costanti, a formare il valore di una data quantità, sembra anche a noi che si possa determinare la stessa costante come più piace senza togliere nulla all'esattezza ed alla generalità delle espressioni analitiche che contengono la soluzione del problema. Così sebbene il valore di quella costante presa isolatamente sia arbitrario e possa essere qualunque, sì reale che immaginario, le condizioni del problema non prescrivendone nè determinandone alcuno in particolare; pure dovendo la stessa costante portata dall'integrazione esservi considerata in complesso con altre quantità arbitrarie, era permesso ed era anzi naturale di determinarla in modo che le espressioni analitiche avessero a riuscire le più semplici possibili; giacchè è sempre come una condizione implicita e sottintesa di ogni problema il ridurre le formole alla maggior possibile semplicità.

(*) Riflessioni del Prof. Plana nel Giornale intitolato: *Biblioteca Italiana*, fascic. IX 1816.
(**) *V.* Saggio delle Riflessioni pubblicate dalla *Biblioteca Italiana ec.*, del sig. Tadini. Milano 1817.

In seguito il sig. Venturoli ha esposto la compiuta determinazione del movimento dell'acqua circoscritta da linee rette nel 2.° tomo della 3.ª edizione de' suoi *Elementi di meccanica ed idraulica* che vide la luce in Milano nel 1818. In quest'occasione l'esimio Autore, dopo aver ricavato dal proprio metodo i succitati valori di p ed r per un tal caso di movimento particolare, si estende anche a farne rilevare alcune altre notabili conseguenze. Così, com'egli osserva, per l'equazione generale della linea descritta da ciascun punto del fluido si ha $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$ ossia $z = Cx$, la quale è l'equazione alla linea retta che passa per l'origine delle coordinate e fa con l'asse delle x l'angolo che ha per tangente C; d'onde se ne deduce che tutte le particelle del fluido nel vaso o tubo rettilineo *si muovono per linee rette convergenti al punto di concorrenza delle due estreme che formano le pareti del recipiente.* Da questo teorema se ne ricava poi per corollario che nel caso delle pareti rettilinee ed orizzontali la velocità è costante in tutti i punti della corrente, come trovò il sig. Tadini.

Il valore della velocità assoluta U risultando per i suddetti valori di p ed r

$$U = \frac{2A}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

offrì al sig. Venturoli l'altro teorema che in ciascun punto *essa è inversamente proporzionale alla distanza dall'anzidetto punto di convergenza delle particelle fluide, e che è la medesima in tutti i punti situati nello stesso arco di cerchio descritto attorno di tal punto come centro.*

Riguardo alla pressione λ per essersi trovato

$$F(x \pm z\sqrt{-1}) = \frac{A}{x \pm z\sqrt{-1}}$$

il sig. Venturoli ne ottenne

$$\lambda = C - gx\cos\zeta - gz\sin\zeta + \frac{dA}{dt} \log(x^2 + z^2) + \frac{2A^2}{x^2 + z^2}$$

Inoltre il sig. Venturoli si è nella stessa occasione occupato di dimostrare la conformità della sua soluzione e l'identità del suo caso e delle formole relative con quanto ha ritrovato il sig. Tadini trattando con metodo diverso lo stesso caso teorico. Una tale dimostrazione è poi anche facile da ottenersi, giacchè colla semplice permutazione delle coordinate le formole del sig. Tadini si trasformano in quelle del sig. Venturoli, e queste reciprocamente si cambiano in quelle.

Successivamente lo stesso sig. Venturoli ha data la soluzione esatta e compiuta di un caso del moto dell'acqua riferito a tre coordinate, cioè di quello dell'acqua che scorre entro vasi di data figura conica (*). Per questo caso avviene che si possa assai facilmente trovar l'integrale particolare dell'equazion fondamentale del moto, cioè trovare una funzione φ che soddisfacia all'equazione differenziale del 2.° ordine surriferita (1) ed insieme alla condizione richiesta dalla figura del vaso conico; per il che basta supporre che le particelle contigue ai lati del vaso conico discendano in linea retta rasente i lati medesimi, la qual condizione, oltre a verificarsi nel caso del vaso conico disposto coll'asse verticale, non lascia di essere plausibile per gli altri casi.

L'equazione della linea descritta da ciascun punto del fluido è contenuta nella proporzione

$$p : q : r : : dx : dy : dz$$

la quale si ricava eliminando il tempo dt dalle equazioni $p = \frac{dx}{dt}$, $q = \frac{dy}{dt}$, $r = \frac{dz}{dt}$. Questa proporzione deve verificarsi anche per la linea descritta da un punto contiguo alle pareti e pel supposto questa linea è il lato stesso del cono. Collocata l'origine delle ascisse nel vertice e preso l'asse del cono per asse delle x abbiamo per ciascun lato

$$dx : dy : dz : : x : y : z$$

dunque per le particelle attigue alle pareti del cono dovrà essere

$$p : q : r : : x : y : z$$

la qual condizione viene adempita col porre $p = Mx$, $q = My$, $r = Mz$ essendo M una funzion qualunque delle variabili x, y, z. Quindi sarà

$$d\varphi = Mxdx + Mydy + Mzdz$$

e nel supposto che sia $d\varphi$ un differenziale esatto, sarà M e per conseguenza anche φ funzione di $x^2 + y^2 + z^2$. Chiamando F questa funzione si determina in modo da soddisfare all'equazione differenziale del moto (*vedi la Memoria di Venturoli nelle* Ricerche idrometriche *ec.*) e si ottiene pel richiesto valore

$$\varphi = F = \text{Cost.} - \frac{2A}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

(*) *V.* Ricerche idrometriche e geometriche della Scuola d'Ingegneri Pontificj d'acque e strade per l'anno 1821. Milano 1822.

in cui essendo A una quantità arbitraria si può anche scrivere semplicemente A in luogo di $2A$. Da questo valore di φ si ricavano subito i valori di tutti gli elementi del moto nel caso qui considerato. In quanto alle velocità componenti si ha

$$p=\frac{Ax}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \qquad q=\frac{Ay}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \qquad r=\frac{Az}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

onde la velocità assoluta di ciascun punto del fluido viene espressa da

$$U=\sqrt{p^2+q^2+r^2}=\frac{A}{x^2+y^2+z^2}$$

In quanto poi alla pressione siccome niun' altra forza acceleratrice sollecita al moto il fluido, fuorchè la gravità g, la quale è diretta nel presente caso in senso contrario alle x, si avrà

$$\lambda=C-gx+\frac{dA}{dt}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{A^2}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

nella quale espressione le indeterminate C, A sono costanti in riguardo delle variabili x, y, z, ma possono contenere in qualsivoglia modo l' altra variabile t e si determinano colla condizione che tanto nella suprema quanto nell' infima sezione dev' essere la pressione eguale a quella dell' atmosfera.

Dalle ritrovate espressioni si raccoglie 1.° che tutte le particelle dell' acqua contenute nel vaso conico discendono per linee rette convergenti al vertice del cono; 2.° che per un medesimo istante di tempo tutti i punti collocati in una superficie sferica descritta intorno al vertice del cono e contenuti entro il vaso discendono con eguale velocità; 3.° che nello stesso istante le velocità de' punti situati in diverse superficie sferiche sono reciprocamente proporzionali alle medesime superficie. Tutti questi teoremi offrono dunque altrettante analogie tra il moto dell' acqua nel vaso conico ed il moto dell' acqua nel vaso o tubo parallelepipedo. Confrontando poi i ritrovati valori esatti per gli elementi del moto dell' acqua nei vasi conici con quelli che si hanno dalla nota teoria del moto lineare dei fluidi se ne ricava che per le particelle che discendono lungo l' asse del vaso i valori rigorosi sono precisamente quelli stessi che dalla teoria del moto lineare ne risulterebbero. Di qui è che quest' ultima teoria supponente il parallelismo degli strati sebbene inchiuda un falso supposto, pure pel presente caso determina aggiustatamente il moto nella linea centrale del vaso. Tutta la discrepanza sta in ciò che gli strati che di-

scendono paralleli a sè stessi non sono già le sezioni piane ed orizzontali, ma bensì le sezioni sferiche concentriche al vertice del cono; ond'è che per ottenere la quantità dell'efflusso nell'unità di tempo, ritrovata che siasi la velocità dell'acqua nell'infimo punto dell'asse corrispondente alla data ascissa non si dovrà moltiplicarla per il piano della luce, ma bensì per la calotta sferica insistente a detto piano e descritta con raggio eguale alla stessa ascissa, Da ciò si viene anche a desumere che la superficie esteriore e libera dell'acqua scorrente nel vaso conico invece di esser piana, come si suppone coll'ipotesi del parallelismo degli strati, dev'essere curva, e che la pressione non si mantiene costante nella sezione orizzontale condotta per un dato punto dell'asse del vaso, ma bensì in una superficie curva che il sig. Venturoli insegna a determinare.

Ristringendosi qui alla considerazione del moto dell'acqua già ridotto a permanenza nei vasi conici, le quantità C, A sono in questo stato del moto quantità del tutto costanti, e determinandole colle condizioni relative alle due estremità della vena fluida si trovano

$$C = g\pi + gm - gh \cdot \frac{n^4}{m^4} \qquad\qquad A = n^2 \sqrt{2gh}$$

chiamando π l'altezza della colonna d'acqua equivalente alla pressione atmosferica; m, n le ascisse terminanti alle due superficie suprema ed infima, e facendo per brevità $\dfrac{n-m}{1-\dfrac{n^4}{m^4}} = h$. Risultano pertanto i seguenti valori per la velocità e per la pressione in ciascun punto dell'acqua contenuta nel vaso conico

$$U = \frac{n^2 \sqrt{2gh}}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\lambda = g(\pi + m - x) + gh\, n^4 \left\{ \frac{1}{x^2+y^2+z^2} - \frac{1}{m^4} \right\}$$

Di qui si ha la conferma che non è piana la superficie suprema del fluido nel vaso ma è concava, e che il maggior avvallamento sovrasta al centro del foro per dove si fa l'efflusso. È pur vero quanto a tal proposito riferisce il sig. Venturoli, cioè che Bossut diligentissimo osservatore dei fenomeni dell'efflusso dell'acqua dai vasi ci avea avvisati di questa specie d'imbuto che si forma alla superficie dell'acqua sopraincombente al foro onde l'acqua sgorga,

ed aveva notato nella sua *Idrodinamica* che quest' imbuto rendesi tanto più manifesto quanto l'acqua nel vaso è più bassa; ma egli però attribuì questo effetto dapprima a qualche irregolare ed accidentale movimento che prendesse l'acqua entro il vaso, e poi vedendo che una tal cagione non si accordava troppo bene colla costanza del fenomeno, ebbe pur anche ricorso alla pressione della colonna d'aria sovrastante al foro senza però dichiarare in qual modo questa pressione potesse produrre il divisato effetto. Ora invece mercè le suesposte formole del sig. Venturoli si ha l'evidente spiegazione dell'osservato fenomeno, talchè la generazione dell' imbuto nell' efflusso dell' acqua dai vasi si presenta adesso naturalissima e dedotta dalla sua vera e necessaria cagione, quale si è la gravità della vena fluida; ed è pur facile di ricavare per una conseguenza delle stesse formole che l'imbuto deve essere tanto più apparente quanto si viene facendo minore il rapporto delle ascisse estreme $\frac{m}{n}$

Di tal maniera in Italia colla soluzione dei varj casi superiormente considerati si andavano preparando i materiali per innalzare un nuovo edificio di scienza idraulica sulle tracce dell' immortale Lagrange. Allo stesso tempo i geometri di altri paesi assecondavano coi loro sublimi ed efficaci sforzi gli impulsi dati fra di noi a questo importante genere di applicazione della *Meccanica Analitica*. In Francia specialmente il sig. Poisson osservò che il caso del movimento delle onde risoluto dal Lagrange non era il più interessante per la pratica, e che per avvicinarsi alle osservazioni più comuni e più accertate non si poteva supporre che nella formazione delle onde l'acqua non venga scossa e rimossa che ad una piccolissima profondità, qualunque sia questa profondità dell' acqua e la figura del fondo del bacino. Passando a considerare il movimento delle onde più importante suppose il sig. Poisson la profondità del fluido assai grande e come infinita per rapporto all' estensione delle oscillazioni delle sue molecole. In tal caso le onde si vedevano tuttodì a formarsi e propagarsi alla superficie dell' acqua secondo leggi non per anco determinate nè dal calcolo nè dalle osservazioni, quando il sig. Poisson fece della teoria delle onde il soggetto della sua bella Memoria inserita fra quelle dell' Istituto di Francia per l'anno 1816.

Ritenendo le denominazioni ed i principj della *Meccanica Analitica*, la teoria delle oscillazioni di un fluido incompressibile ed omogeneo, sottomesso all' azione della gravità ed un poco rimosso dal suo stato d'equilibrio, è com-

presa nella solita equazione differenziale

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0$$

da cui dipendono le espressioni

$$(2) \qquad p=\frac{d\varphi}{dx} \qquad q=\frac{d\varphi}{dy} \qquad r=\frac{d\varphi}{dz}.$$

e nella equazione

$$(3)' \qquad \lambda=-gz+\frac{d\varphi}{dt}$$

Le velocità secondo gli assi $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$ e le distanze delle molecole alle loro posizioni iniziali sono riguardate come quantità assai piccole in tutta la durata del movimento, per cui se ne possono trascurare nel calcolo i prodotti e le potenze superiori alla prima. Di qui risulta che nelle quantità $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$ si dovranno considerare x, y, z come costanti e relative alla posizione iniziale di ciascuna molecola.

Denotando con z' l'ordinata verticale di un punto qualunque in superficie, l'equazione della superficie stessa del fluido dedotta dall'equazione (3)' sarà

$$g\,z'-\frac{d\varphi}{dt}=0$$

Inoltre prendendo per il piano delle x, y quello del livello del fluido nello stato di equilibrio, nel qual caso z' e per conseguenza anche il valore di $\frac{d\varphi'}{dt}$ sarà piccolissimo, le equazioni relative al fondo ed alla superficie superiore del fluido che risultano dalla solita condizione che si ha costume di risguardare come necessaria alla continuità della massa fluida e che in molti casi si verifica in natura, sono le seguenti:

$$g\cdot\frac{d\varphi}{dz}-\frac{d^2\varphi}{dt^2}=0$$

$$\frac{d\varphi}{dz}=0$$

la prima delle quali ha luogo per il valor particolare di $z=0$ e la seconda per quello di $z=h$, essendo h l'altezza costante e verticale del fluido sul fondo del bacino.

Tali sono le equazioni differenziali relative al problema delle onde nel caso qui considerato e la questione era così ridotta a soddisfare simultaneamente nella maniera più generale alle medesime equazioni coll' adempire alle condizioni relative allo stato iniziale del fluido. L' Istituto di Francia aveva appunto proposta la stessa questione ai geometri per il soggetto di premio dell' anno 1816 quando il sig. Poisson si determinò di rendere pubblica la succitata sua Memoria sulle onde, in cui si trovano espresse per integrali definiti le formole generali che contengono implicitamente la soluzion del problema principale della teoria delle onde che si propagano con una velocità costante o con moto uniformemente accelerato sì in un piano che nello spazio, ossia essendo riferito il moto tanto a due che a tre coordinate.

L' accordo soddisfacente, che si rimarca tra il calcolo del sig. Poisson ed alcune esperienze ed osservazioni sul movimento delle onde dovute al sig. Biot ed al sig. Bremontier, fornisce già una verificazione della fina analisi usata nell' anzidetta Memoria, e delle conseguenze a cui è stato condotto il suo illustre autore. Fra le principali di queste conseguenze si annoverano le seguenti. Nelle onde la velocità non dipende nè dalla figura del corpo colla cui immersione si ottiene la scossa primitiva del fluido nè dalla quantità di cui esso si profonda nel fluido, ma bensì varia la velocità col raggio della di lui sezione a fior d' acqua ed è proporzionale alla radice quadrata di questo raggio. Le oscillazioni verticali che producono l' apparenza delle onde che si propagano alla superficie del fluido diminuiscono di grandezza a misura che si allontanano dal luogo della scossa primitiva. La loro ampiezza segue la ragione inversa della radice quadrata delle distanze a questo punto quando il fluido è contenuto in un bacino di una larghezza costante; essa segue la semplice ragion inversa di queste distanze quando il fluido è libero da ogni parte e che le onde si propagano circolarmente attorno d'un centro comune. Gli spazj che percorrono le molecole dell' interno del fluido situate al di sotto del luogo della scossa primitiva decrescono con una legge più rapida, seguendo la ragione inversa delle profondità o del suo quadrato secondo che il fluido è ristretto o no in un bacino di larghezza costante, di modo che a distanze grandissime dal luogo della scossa il movimento dev' essere più sensibile alla superficie che nell' interno del fluido; nondimeno questa legge di decrescimento nel senso della profondità, che si conchiude dall'analisi di Poisson, non è talmente rapida che il movimento non possa ancora farsi sentire ad assai grandi profondità.

Chi poi volesse conoscere gli ulteriori sforzi che si sono fatti anche dai geometri italiani sulla determinazione del movimento delle onde dopo il caso risolto da Lagrange avrebbe da consultare alcune dotte Memorie del sig. Plana che si riferiscono appunto alla stessa teoria e che sono inserite fra quelle dell' Accademia di Torino (*ved. tom.* 20 *e seg.*). Chi finalmente desiderasse di veder verificati con nuove esperienze alcuni punti della teoria delle onde del sig. Poisson può ricorrere fin d'ora a quelle istituite sulla propagazione delle onde dal sig. Bidone nello Stabilimento idraulico dell' Università di Torino (*ved. il tom.* 25 *delle Memorie di quell'Accademia delle Scienze*). L' accordo che si troverà anche tra i risultati di quest' esperienze e quelli del calcolo del sig. Poisson è tale, come dice il sig. Bidone, da assicurare che quando si arrivasse ad adempire per tutti i punti dell' anzidetta teoria delle onde le condizioni richieste dal calcolo, anche i risultati dell'osservazione sarebbero ad esso perfettamente conformi. Così si potrebbe almeno in questo caso veder, per così dire, realizzate in natura le diverse circostanze del movimento del fluido che sono contenute nelle formole della teoria.

Fin qui abbiamo nel presente Capo passato in revista diversi casi del movimento dell' acqua che ammettono soluzione esatta e compiuta nella supposta condizione che sia differenziale esatto la quantità $pdx + qdy + rdz$. Ma come si è già osservato di sopra si dà pure qualche caso indipendente da una tal condizione e solubile compiutamente sino all' applicazione pratica.

Lagrange fu ancora il primo a considerare un caso semplicissimo di questa natura nel movimento di un fluido che gira attorno all' asse fisso delle coordinate z con una velocità angolare costante n. Per questo caso avendosi $p = ny$, $q = -nx$, $r = 0$; $pdx + qdy + rdz$ non sarà un differenziale esatto poichè diventa $= n(ydx - xdy)$ che non è integrabile. Ciò non di meno l'equazione delle forze acceleratrici in questo caso sarà integrabile da sè medesima perchè si avrà $\frac{dp}{dy} = n$, $\frac{dq}{dx} = -n$ e tutte le altre differenze parziali di p, q saranno nulle in guisa che la detta equazione sarà

$$d\lambda - dV = -n^2(xdx + ydy)$$

di cui l'integrale dà

$$\lambda = V - \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + fonct.\ t$$

valore che soddisferà per conseguenza alle tre equazioni (F) dell' art. 10 della

Sez. XI, *Mecc.ª Anal.ª* di Lagrange. A riguardo poi dell'equazione (G) dello stesso articolo, che è quella relativa alla così detta continuità della massa, avrà pur luogo anch'essa, poichè i valori supposti per p, q, r danno

$$\frac{dp}{dx} = 0, \frac{dq}{dy} = 0, \frac{dr}{dz} = 0$$

Supponendo che il fluido sia contenuto in un vaso verticale aperto superiormente, si avrà per l'equazione della superficie libera del fluido

$$0 = V - \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + funz.^e\ t$$

dove $V = -gz$, contando le z positive nel senso della gravità e tendendo questa nel nostro caso ad aumentare le coordinate. Supponendo inoltre che il moto sia ridotto a stato di permanenza per cui il fluido nel vaso conservi una forma costante, si avrà per l'equazione alla superficie suprema e libera del fluido quest'altra

$$C = gz + \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2)$$

essendo C una costante arbitraria. Di qui si vede che il fluido in questo caso deve avere la forma di un paraboloide di rivoluzione di cui l'asse è quello della rotazione del fluido. La costante C si determinerà cercando il volume della parte di questo solido che resterà compresa nel vaso ed eguagliandola al volume della quantità d'acqua in moto che dev'essere data (*ved.* Poisson, *Traité de Mécanique,* Tom. II ai NN. 491, 492, 571).

Di qui se ne può anche conchiudere col Lagrange che nel calcolo delle oscillazioni del mare in virtù dell'attrazione del Sole e della Luna non è supponibile che la quantità $pdx + qdy + rdz$ sia integrabile, poichè essa non lo è quando il fluido è in riposo per rapporto alla terra e che non ha che il movimento che gli è comune colla terra stessa; perciò vuolsi trar partito da altre circostanze favorevoli per comporre le leggi analitiche dei più semplici casi dell'imponente fenomeno che ha luogo nel grande bacino dell'oceano. Ora il celebre geometra francese sig. Laplace si può considerare come il principale promotore della teoria del flusso e riflusso del mare che venne da lui trattata in diverse occasioni (*); ma noi possiamo servirci qui di un interessante

(*) Vedi *Mémoires de l'Acad. des Sciences de Paris* (ann. 1775. p. 95). *Mécanique Céleste.* (vol. I e II). *Mémoires de l'Institut de France* (ann. 1817, 1818 e seg.).

Memoria del geometra italiano sig. Plana (*) per estrarre ed accennare brevemente nel presente Capo anche la soluzione del problema relativa a questo speciale movimento delle acque.

Se in luogo di impiegare le coordinate rettangole x, y, z, si farà uso delle coordinate polari r, φ, θ nello stabilire le equazioni fondamentali del moto dell' acqua, talchè si abbia in generale

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta\,.\cos\varphi \qquad z = r\sin\theta\,.\sin\varphi$$

si arriverà ad ottenere per l'equazione della continuità della massa fluida la seguente:

$$o = 2r\sin\theta\cdot\frac{dr}{dt} + r^2\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dt} + r^2\sin\theta\left\{\frac{d\cdot\frac{dr}{dt}}{dt} + \frac{d\cdot\frac{d\theta}{dt}}{d\theta} + \frac{d\cdot\frac{d\varphi}{dt}}{d\varphi}\right\}$$

in cui $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ vanno riguardate come funzioni delle quattro variabili r,θ,φ,t.

Nella teoria delle oscillazioni del mare le tre variabili r, θ, φ si allontanano sempre assai poco dallo stato d' equilibrio che avrebbe luogo in virtù della forza centrifuga e della gravità della terra. Dunque notando con r_1, θ_1, $nt+\omega$ i valori di r, θ, φ relativi all'equilibrio della massa fluida, e facendo $r = r_1 + s$; $\theta = \theta_1 + u$; $\varphi = nt + \omega + v$ si potranno considerare s, u, v come tre variabili sempre assai piccole, ed r_1, θ_1 come quantità indipendenti dal tempo t; si avrà in conseguenza $\frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dv}{dt}$ poichè la variazione $d\varphi$, che entra nella suesposta equazione del fluido, si riferisce unicamente al movimento *relativo* delle molecole acquee sullo sferoide terrestre, contato da un dato meridiano che gira insieme a lui di un movimento comune, e per conseguenza non si deve far variare nt nel prendere il valore di $\frac{d\varphi}{dt}$. Sostituendo pertanto questi valori nell' equazione fondamentale, trascurandovi le quantità di second' ordine come $s\frac{ds}{dt}$, us, $s\frac{du}{dt}$ ec.; osservando poscia che r_1 e θ_1 sono quantità indipendenti dal tempo, ed integran-

---

(*) Vedi *Reflexions sur la theorie de l'équilibre et du mouvement des fluides, qui recouvrent un sphèroide solide à-peu-près sphérique. Par M. Plana, Astronome Royal. Gènes.* 1821.

dola per rapporto alla variabile t, si ridurrà alla seguente

$$o = \left(\frac{d \,.\, r^2 s}{dr}\right) + r^2 \left\{\frac{du}{d\theta} + \frac{dv}{d\omega} + \frac{u\cos\theta}{\sin\theta}\right\}$$

scrivendo per più semplicità r in luogo di r_1, θ in luogo di θ_1 e convenendo che r, θ, $nt + \omega$ denotino le coordinate polari relative all'equilibrio della massa fluida.

Quest'equazione si accorda con ciò che il sig. Laplace ha dato per lo stesso problema a pag. 101 nel I.° volume della sua *Meccanica Celeste*. Per poco che si rifletta sul significato delle tre variabili s, u, v, si comprenderà che la prima s dev'essere assai più piccola che le altre due nel supposto che sia assai piccola la profondità totale dell'oceano per rapporto al raggio medio della terra. In questa supposizione notando con γ una funzione di θ e di ω propria a rappresentare la profondità del mare in un luogo qualunque determinato dalla longitudine ω e dal complemento della latitudine θ; e chiamando y l'elevazione assoluta della molecola fluida al disopra della superficie di *livello*, si otterrà

$$y = -\left(\frac{d \,.\, \gamma u}{d\theta}\right) - \left(\frac{d \,.\, \gamma v}{d\omega}\right) - \gamma \cdot \frac{u\cos\theta}{\sin\theta}$$

Tale è l'espressione per y che il sig. Laplace ha ricavato dai principj della scienza alla pag. 104 del primo volume della *Meccanica Celeste*. L'anzidetta espressione diventa assai più semplice nel caso particolare in cui si suppone la profondità γ del fluido costante; ciò che ha luogo per le oscillazioni di un fluido omogeneo di poca profondità che ricopre una sfera. Se si suppone inoltre che la sfera non abbia punto di movimento di rotazione, si ha il caso più semplice di tutta la teoria del flusso e riflusso del mare. Malgrado ciò la soluzione del caso qui supposto non lascia di essere assai difficile, e per ben giudicare del grado della sua difficoltà basta studiare le prime ricerche del sig. Laplace risguardanti questo problema, e la di lui soluzione spinta sino alla pratica applicazione, che si trovano riferite alla pag. 174 del vol. II.° della *Meccanica Celeste*. Siffatta teoria del flusso del mare è poi anche stata posta da Laplace al confronto di nuove e numerose esperienze istituite per cura del medesimo in una serie degli anni decorsi al porto di Brest in Francia; su di che veggasi specialmente la succitata Memoria sul flusso e riflusso del mare inserita dal sig. Laplace fra quelle dell'Istituto di Francia per gli anni 1817 e 1818. Noi qui ci limiteremo ad osservare che il fenomeno della marea

dipende bensì dalla vera forma del fondo e delle coste del mare, la cui differenza produce una variazione sensibilissima nel tempo e nella grandezza assoluta della marea stessa, che il calcolo non può in alcun modo determinare; ma nondimeno il calcolo stesso discopre tante altre utili verità poco o nulla dipendenti da quella sconosciuta forma del bacino che è sorprendente la conformità de' suoi risultamenti coi fenomeni della natura.

In ultimo il sig. Piola ha mostrato (*) che vi sono due altri esempj sul moto dell'acqua entro tubi o vasi di date pareti, i quali ammettono una esatta soluzione; ma questa riesce assai più elegante che utile, perchè, come avvertì lo stesso sig. Piola, non risguarda casi frequenti in natura ancorchè fosse completa a segno da poter essere spinta sino alla pratica applicazione. Il primo esempio serve a determinare il movimento dell'acqua a due coordinate entro un vaso o tubo rettangolare nel senso della larghezza col fondo piano, e la cui curva della parete superiore sia un'iperbola apolloniana. Il secondo esempio si riferisce all'altro caso in cui la parete superiore del velo fluido sia una iperbola cubica ravvolta colla sua convessità verso il dato fondo rettilineo e convergente ad esso come ad assintoto.

CAPO II.°

Formole sul moto dell'acqua nei canali disposti con un dato fondo.

Le succennate soluzioni pel moto dell'acqua a due ed a tre coordinate si ottennero o colla condizione che l'acqua si trovi circoscritta fra date superficie e linee estreme, o colla restrizione che il fluido sia poco profondo o dotato di assai piccole velocità secondo gli assi, o finalmente situato in altre favorevoli circostanze per modo che si renda possibile l'integrazione delle eqnazioni fondamentali del moto e la determinazione delle relative funzioni arbitrarie sino a dare delle formole applicabili alla pratica e che esprimano le leggi dell'efflusso e dell'agitazione dell'acqua ne' vasi, ne' tubi e

(*) *Vedi* la Memoria del sig. Dott. Gabrio Piola premiata dall'Istituto delle Scienze di Milano: *Sull'applicazione dei principj della Meccanica Analitica di Lagrange ai principali problemi.* Milano, dalla Stamperia del Governo, 1825.

ne' grandi bacini. Passando qui a determinare il moto dell' acqua ne' canali ordiuarj che sono aperti superiormente ed assai più estesi in lunghezza che in larghezza, assumeremo per condizione che sia costante la pressione alla superficie esteriore e libera del fluido, e riterremo che sia data la parete all' altro estremo del fluido stesso. Questa distinzione nella dottrina del movimento delle acque ci sembra naturale e consentanea alle diverse applicazioni che si offrono nella pratica, ancorchè in sostanza ogni vaso si possa considerare per un canale, ed ogni canale per un vaso. D' altronde una tale distinzione non è nuova nella teoria dei fluidi, avendola usata fra gli altri il Cocoli che nella sua Memoria (*vedi di sopra l'* Introduzione *a pag.* 10) si propose appunto di risolvere i due separati problemi sul moto dell' acqua col soddisfare alle condizioni del moto ne' vasi e del moto ne' canali.

E dapprima supponendo il caso che l' acqua scorra in un vero canale di sponde piane e verticali con superficie esteriore libera e con fondo piano ed inclinato all' orizzonte, sia qualunque la profondità del fluido, e la sua velocità in una sezione data all' origine delle coordinate sia uguale per tutte le molecole del fluido e non varj col tempo per essere il moto già ridotto allo stato di permanenza. Restringendosi alla considerazione del moto in un piano e chiamando x, z le coordinate di un punto qualunque della corrente di fluido, sia preso l' asse delle x nel piano stesso che costituisce il fondo del canale; si contino le z positive nel senso della gravità e le x positive nel senso della corrente; sia inoltre g la forza acceleratrice della gravità e ξ l' angolo che la verticale presa d' alto in basso fa coll' asse delle x positive; l la larghezza del canale, v la velocità uniforme e parallela al fondo nella sezione data; a l' altezza assunta dall' acqua nella medesima sezione; Q la portata del canale; sia infine per la sezione indeterminata del canale z' l' ordinata del pelo d' acqua e λ la pressione di un punto qualunque, tutta la difficoltà del problema consiste nel trovare per φ la funzione di x, z che resta determinata dall' equazione (*vedi l' art.* 23 *della Sez. XI.*)

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

da cui si derivano le solite espressioni per le velocità secondo gli assi

$$p = \frac{d\varphi}{dx} \qquad\qquad r = \frac{d\varphi}{dz}$$

e per la pressione

$$\lambda = -gx\cos\xi - gz\sin\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + C$$

in cui C esprime una costante e l'angolo ξ è considerato $< 90^\circ$, per cui $\cos\xi$ è una frazione che nel caso dei canali ordinarj è anche assai piccola.

Sembra a primo aspetto che non valga qui il metodo lagrangiano fondato sulle serie per determinare la φ, mentre non si può fare la supposizione che qualcuna delle dimensioni del velo fluido sia assai piccola in confronto delle altre, cosicchè riesca φ rappresentabile con una serie della forma $\varphi = \varphi' + \varphi'' z + \varphi''' z^2 + \varphi^{IV} z^3 +$ ec., in cui φ', φ'', φ''' φ^{IV} ec. siano funzioni di x senza z. Si osserva per altro che si può far uso dello stesso metodo anche quando essendo considerabili le z risultino invece assai piccole e l'una successivamente minore dell'altra le φ', φ'', φ''' ec. contenute nell'anzidetta serie.

Supponendo difatti che quest'ultima condizione da verificarsi *a posteriori* sia soddisfatta e facendo le opportune sostituzioni e riduzioni nelle formole del Lagrange si ottengono pel nostro caso presente i seguenti risultati: primieramente dall'essere l'equazione del dato fondo del canale $z = 0$, per l'art. 26 della Sez. XI si ha

$$\varphi'' = 0 \quad ; \qquad \varphi^{IV} = 0 \quad ; \qquad \varphi^{VI} = 0 \qquad \text{ec.}$$

e quindi per gli art. 25 e 26, limitandosi al grado di approssimazione che risulta dal tener conto dei termini dell'ordine $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ e dal trascurare quelli degli ordini successivi, col valore $\varphi = \varphi' + z^2\varphi'''$ si ricavano

$$\varphi = \varphi' - \frac{z^2}{2}\cdot\frac{d^2\varphi'}{dx}$$

$$p = \frac{d\varphi'}{dx}$$

$$r = \frac{d\varphi'}{dz} = -z\frac{d^2\varphi'}{dx^2}$$

$$\lambda = -gx\cos\xi - gz\sin\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2 + C$$

Inoltre per l'equazione della curva direttrice della superficie esteriore e libera del fluido essendo $\lambda = 0$ si avrà

$$0 = -gx\cos\xi - gz'\sin\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2 + C$$

Determinando la costante C col fare che quando $x = o$ sia $\frac{d\varphi'}{dx} = v$ e $z' = -a = -\frac{Q}{lv}$

si ottiene
$$C = -\frac{1}{2}v^2 - g\frac{Q\, sin\zeta}{lv}$$

per cui sostituendo si ha

$$o = -gx\, cos\zeta + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}v^2 - g\frac{Q\, sin\zeta}{lv} - gz'\, sin\zeta$$

Simultaneamente l'equazione di condizione perchè alla superficie libera restino le stesse particelle di fluido che una volta vi si trovano secondo l'art. 27 della Sez. XI sarà

$$o = -g cos\zeta \cdot \frac{d\varphi'}{dx} + \left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2 \cdot \frac{d^2\varphi'}{dx^2} + gz'\, sin\zeta \cdot \frac{d^2\varphi'}{dx^2}$$

e ponendo $\lambda' = -gx\, cos\zeta + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2 - g \cdot \frac{Q\, sin\zeta}{lv} - \frac{1}{2}v^2$ onde si abbia $z' = \frac{\lambda'}{g\, sin\zeta}$ e $\frac{d\lambda'}{dx} = -g\, cos\zeta + \frac{d\varphi'}{dx} \cdot \frac{d^2\varphi'}{dx^2}$

risulterà per la detta equazione di condizione

$$\frac{d\lambda'}{dx} \cdot \frac{d\varphi'}{dx} + \lambda' \cdot \frac{d^2\varphi'}{dx^2} = \frac{d.\lambda'\frac{d\varphi}{dx}}{dx} = o$$

Integrando quest' ultima si ha immediatamente

$$\lambda' \cdot \frac{d\varphi'}{dx} = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2 - gx\, cos\zeta - g\frac{Q\, sin\zeta}{lv} - \frac{1}{2}v^2\right\} \cdot \frac{d\varphi'}{dx} = \text{Cost.}$$

Per determinare la costante portata dall' integrazione basta fare in tal espressione $x = o$ e $\frac{d\varphi'}{dx} = v$ come si ha all' origine delle coordinate, perchè si trovi

$$\text{Cost.} = -g\frac{Q}{l}sin\zeta$$

Sostituendo questo valore e facendo $\frac{d\varphi'}{dx} = \omega$ si arriva alla seguente equazione del 3.° grado in ω già mancante del secondo termine

$$\omega^3 - 2g\omega\left(\frac{Q\, sin\zeta}{lv} + \frac{v^2}{2g} + x\, cos\zeta\right) + 2g\frac{Q}{l}sin\zeta = o$$

che risoluta dà l'espressione

$$\omega=\gamma\left[-g\frac{Q}{l}sin\zeta+\sqrt{\left\{g^2\frac{Q^2}{l^2}sin^2\zeta-\frac{8}{27}g^3\left(\frac{Q sin\zeta}{lv}+\frac{v^2}{2g}+x\cos\zeta\right)^3\right\}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$+\gamma^2\left[-g\frac{Q}{l}sin\zeta-\sqrt{\left\{g^2\frac{Q^2}{l^2}sin^2\zeta-\frac{8}{27}\left(\frac{Q sin\zeta}{lv}+\frac{v^2}{2g}+x\cos\zeta\right)^3\right\}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

ossia eliminando la quantità Q coll'espressione $Q=lva$

$$\omega=\gamma\left[-gva\,sin\zeta+\sqrt{\left\{g^2v^2a^2sin^2\zeta-\frac{8}{27}g^3\left(a\,sin\zeta+\frac{v^2}{2g}+x\cos\zeta\right)^3\right\}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$+\gamma^2\left[-gva\,sin\zeta-\sqrt{\left\{g^2a^2v^2sin^2\zeta-\frac{8}{27}g^3\left(a\,sin\zeta+\frac{v^2}{2g}+x\cos\zeta\right)^3\right\}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

dove γ rappresenta una delle radici terze dell'unità.

Avendo così determinato $\frac{d\varphi'}{dx}$ in funzione di x si hanno subito, entro i limiti di approssimazione a cui ci siamo arrestati, le velocità secondo gli assi e la pressione date dalle espressioni

$$p=\omega$$

$$r=-z\cdot\frac{d\omega}{dx}$$

$$\lambda=g\,sin\zeta\,(z'-z)$$

e l'equazione della curva direttrice della superficie esteriore e libera del fluido sarà $z'=-\frac{Q}{l\omega}$ ossia

$$z'^3+x\cot\zeta\,z'^2+\frac{1}{sen\zeta}\left(a\,sin\zeta+\frac{v^2}{2g}\right)\cdot z'^2-\frac{a^2v^2}{2g\,sin\zeta}=0$$

Quest'equazione della curva del pelo d'acqua appartiene ad una linea di 3.° ordine, specie decimaterza (*vedi Eulero. Introd. all'anal. degli infiniti*), la quale sottoposta ai noti metodi si trova avere 4 rami infiniti, due che hanno per assintoto la linea stessa che rappresenta il fondo del canale e l'asse delle x, e due altri una retta orizzontale rappresentata dall'equazione

$$z'=-x\cdot\cot\zeta-\frac{1}{sen\zeta}\left(a\,sin\zeta+\frac{v^2}{2g}\right)$$

Come si è già avvertito sono dedotte le riferite formole pel moto dell'acqua in un canale nella supposizione che i termini trascurati sieno piccoli, e l'uno successivamente minore dell'altro. Ora per avere di ciò la debita verificazione si osservi che tutti i termini trascurati contengono delle potenze e dei differenziali della quantità $\frac{d^2\varphi'}{dx^2}$ e che eseguendo le successive differenziazioni si hanno per i detti termini quantità realmente piccole e successivamente minori aventi per moltiplicatore potenze di $cos\xi$ successivamente più alte. Dopo i valori già ritrovati per gli elementi del moto dell'acqua nel caso qui considerato sarebbe facile lo spingere innanzi le approssimazioni ai termini successivi seguendo lo stesso metodo lagrangiano; se non che si arriverebbe con lunghi calcoli a formole niente più utili delle suesposte per le applicazioni della pratica.

L'accennata soluzione è dovuta al sig. Mossotti che l'annunziò dianzi in una Nota stampata nel 1821 insieme alla *Storia della navigazione interna del Milanese* prima d'esporla nella di lui Memoria « *sul moto dell'acqua nei canali* » poscia pubblicata col tomo XIX, parte contenente le Memorie di Matematica della Società Italiana delle Scienze. Le formole che vi si riferiscono vengono a dipendere immediatamente dai principj generali contenuti nella Sez. XI della *Meccanica Analitica* di Lagrange.

Per ciò che risguarda l'uso delle premesse formole nella pratica applicazione soggiungeremo qui alcuni dei corollarj che ne derivano, ed alcune delle principali avvertenze che si debbono avere nella soluzione dei casi pratici.

La velocità ω parallela al fondo del canale risulta indipendente da z e ci mostra che, quando il moto è permanente ed è soddisfatto il criterio d'integrabilità della formola $pdx + rdz$, essa è costante per ogni punto di una stessa sezione entro i limiti di approssimazione adottati. La velocità r perpendicolare al fondo varia invece proporzionalmente all'altezza $-z$, e siccome qui le coordinate e le velocità sono prese positivamente dall'alto al basso, la r sarà diretta in basso se $\frac{d^2\varphi'}{dx^2}$ sarà positivo, e viceversa sarà diretta in alto se $\frac{d^2\varphi'}{dx^2}$ sarà negativo. La velocità assoluta di un punto qualunque di fluido risulta assai prossimamente eguale alla componente nel senso delle x, e quindi anch'essa costante per tutti i punti di una stessa sezione e variabile soltanto da una sezione all'altra. La pressione di un punto qualunque al di sotto della superficie esteriore e libera del fluido, essendo rappresentata dalla surriferita

formola per λ, dove $z' - z$ esprime l'altezza verticale della colonna d'acqua sovrincombente al punto dell'ordinata z, se ne deduce che nel moto permanente qui considerato, essa pressione uguaglia il peso della colonna fluida che gli corrisponde verticalmente, come succede nei fluidi in equilibrio. Il valore della portata del canale in qualunque sezione si trova espresso da $Q = -lz'\omega$; il che conviene col noto *teorema* del Castelli che resta così dimostrato rigorosamente pel caso di movimento qui contemplato.

Allorchè il canale è disposto col fondo orizzontale si ha $\cos\zeta = 0$, $\sin\zeta = 1$ e le superiori formole danno $z = a$; $p = v$ cioè la superficie del fluido è parallela al fondo ed orizzontale, e la velocità è eguale in tutte le sezioni qualunque sia la portata; il che combina col teorema già dimostrato dal sig. Tadini pel moto dell'acqua nei tubi orizzontali di forma parallelepipeda.

Dall'analisi surriferita risulta pure l'equazione

$$(z' + a)\sin\zeta + x\cos\zeta = \frac{\omega^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}$$

di cui il primo membro $(z' + a)\sin\zeta + x\cos\zeta$ esprime la differenza di livello del pelo d'acqua dalla sezione dell'origine delle coordinate alla sezione qualunque dell'ascissa x, mentre il secondo membro $\frac{\omega^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}$ rappresenta la differenza delle altezze dovute alle velocità in queste stesse sezioni delle ascisse x e zero. Di qui adunque si ha il teorema che *la differenza di livello del pelo d'acqua in due sezioni diverse è reciprocamente eguale alla differenza delle altezze dovute alle velocità.*

L'equazione della curva del pelo, essendo del terzo grado, colla risoluzione dà tre valori per z' secondo che si fa $\gamma = 1, \gamma = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \gamma = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ nell'espressione

$$\frac{1}{z'} = \frac{\gamma}{av}\left[gva\sin\zeta + \sqrt{\left\{ g^2a^2v^2\sin\zeta - \frac{8}{27}g^3\left(a\sin\zeta + \frac{v^2}{2g} + x\cos\zeta\right)^3 \right\}} \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$+ \frac{\gamma}{av}\left[gva\sin\zeta - \sqrt{\left\{ g^2a^2v^2\sin\zeta - \frac{8}{27}g^3\left(a\sin\zeta + \frac{v^2}{2g} + x\cos\zeta\right)^3 \right\}} \right]^{\frac{1}{3}}$$

Per distinguere quale fra i diversi valori di z' è quello che più specialmente fa al nostro uopo si osserva facendo la costruzione per punti della curva del

pelo (*vedi la succ. Memoria Mossotti*) che tre rami di curva situati dalla parte delle ascisse positive corrispondono ai tre valori reali che si ottengono per z' e dei quali risulta positivo il primo corrispondente a $\gamma = 1$ e riescono negativi gli altri due corrispondenti al secondo ed al terzo dei surriferiti valori di γ. Se si pone $\cos\beta = \dfrac{gva \sin\zeta}{\sqrt{\dfrac{8}{27} g^3 \left(a \sin\zeta + \dfrac{v^2}{2g} + x\cos\zeta\right)^3}}$ e detta π la semicirconferenza del cerchio che ha il raggio $= 1$, se si prende per β un angolo $< \pi$, i tre valori reali di $\frac{1}{z'}$ diventano

$$\frac{1}{z'} = \frac{2}{av}\sqrt{\frac{2}{3} g\left(a \sin\zeta + \frac{v^2}{2g} + x\cos\zeta\right)} . \cos\frac{\beta}{3}$$

$$\frac{1}{z'} = \frac{2}{av}\sqrt{\frac{2}{3} g\left(a \sin\zeta + \frac{v^2}{2g} + x\cos\zeta\right)} . \cos\frac{2\pi+\beta}{3}$$

$$\frac{1}{z'} = \frac{2}{av}\sqrt{\frac{2}{3} g\left(a \sin\zeta + \frac{v^2}{2g} + x\cos\zeta\right)} . \cos\frac{4\pi+\beta}{3}$$

Così nel preciso caso qui sopra considerato del canale col dato fondo e colla superficie libera è evidente che dei detti tre rami di curva possono rappresentare il pelo d'acqua soltanto i due che restano superiori al fondo del canale ossia dalla parte delle z negative, ed essendo le z negative date dalla 2.ª e dalla 3.ª delle tre radici dell'equazione della curva del pelo, saranno perciò tali radici le sole che bisognerà adottare pel caso qui sopra supposto. Per sapere poi quale delle due radici negative sia quella da scegliersi e da impiegarsi all'atto pratico, si noti col sig. Mossotti che nel punto dove si cominciano ad avere per l'espressione di z' valori reali, qualunque dei tre valori di γ si adotti, sussiste l'eguaglianza $-z' \sin\zeta = \frac{\omega^2}{g}$ cioè l'altezza verticale dell'acqua si trova eguale al doppio dell'altezza dovuta alla velocità nella stessa sezione; e che di più discendendo lungo il canale declive l'altezza della lama d'acqua va sempre diminuendo nel ramo di curva le cui ordinate sono date dalla 2.ª radice di z' e va sempre aumentando nel ramo le cui ordinate

sono date dalla 3.ª radice di z', e viceversa la velocità dell'acqua va sempre aumentando nel 1.° dei detti rami di curva e diminuendo nel secondo. Se dunque nella sezione data all'origine delle coordinate sarà $a \sin\xi < \frac{v^2}{g}$ sussisteranno le circostanze del primo ramo che sarà l'unico che converrà adottare impiegando la seconda radice dell'equazione in z'. Se invece sarà $a \sin\xi > \frac{v^2}{g}$ la curva direttrice della superficie del pelo d'acqua nel canale sarà rappresentata dal secondo ramo corrispondente all'ordinata che si ottiene dalla 3.ª delle tre radici della stessa equazione in z'. Generalmente poi si verificherà in natura il secondo degli accennati rapporti se sarà l'acqua, come si suol dire, *rigurgitata;* si verificherà invece il primo rapporto se sarà l'acqua, per così dire, *libera* nel suo moto entro il canale. L'osservazione ci offre tuttogiorno il moto dell'acqua *rigurgitata* nei canali sostenuti da chiuse od attraversati da sostegni, e ce lo presenta pure di frequente verso lo sbocco dei canali e fiumi in altri canali e fiumi o nel mare. In siffatti corsi d'acqua la linea del *rigurgito* che visibilmente vi si estende alquanto dalla parte inferiore verso la superiore, si prolungherà all'insù come porta la disposizione del ramo della curva del pelo corrispondente alla 3.ª radice dell'equazione in z'. E siccome dalla costruzione di questo ramo della curva del pelo (*vedi la Mem. Mossotti*) si trova che esso invece di una pendenza secondo la direzione della corrente presenta una vera acclività, così resta dimostrato che in simili corsi d'acqua la *linea del rigurgito* non si estende mai a tutta la tratta compresa dalla retta orizzontale tirata all'insù dal punto più elevato del pelo presso all'estremità inferiore del canale. La stessa osservazione giornaliera ci offre pure dei corsi d'acqua *liberi* ossia non soggetti a rigurgito nei tronchi di canale e fiume sgombri di ogni impedimento dal principio alla fine. La legge del moto dell'acqua per questi casi di corso così detto *libero* è tale che vi rende sempre più declive il pelo dell'acqua nel canale più si va al basso seguendo la direzione della corrente. La *linea* di questo *libero* corso d'acqua incomincia il più delle volte laddove termina quella del rigurgito e si estende all'insù a tutta la tratta del canale libero come richiede la natura del ramo di curva corrispondente alla 2.ª radice dell'equazione in z'. Tutto ciò è abbastanza conforme ai risultamenti delle più accertate osservazioni ed esperienze di questo genere (*); e

(*) *V.* l'*Idrostatica* del P. Lecchi. Parte II. Esame VIII. *Del rigurgito.*, pag. 295 e seg.; gli

mentre la teoria del moto lineare combinata con una legge per le resistenze o con altri principj indiretti non valeva nè ad indicare la curva che formano il *rigurgito* e la così detta *chiamata dello sbocco*, nè a precisare la distanza a cui si estendono questi fenomeni nel corso delle acque, la riferita soluzione sul moto dell' acqua nei canali guida facilmente alla cognizione di tali accidenti del suo pelo. Così è sperabile che altri fenomeni osservati in natura vengano ad ottenere la loro plausibile e naturale spiegazione di mano in mano che si andrà perfezionando la vera teoria delle acque correnti colla scoperta di nuovi casi solubili.

Dalla parte delle ascisse negative si estende il quarto dei suddetti rami della curva del pelo, ed è dato dall' unico valor reale che si ha per z' dalla suddetta espressione di $\frac{1}{z'}$ corrispondente alla radice dell' unità $\gamma = 1$. Siccome però questo valore di z' risulta positivo, così resta il detto ramo situato sotto il fondo del canale e non serve a rappresentare il pelo d' acqua nel caso qui considerato.

Istituendo simili considerazioni nel caso che il canale sia col fondo acclive, cioè nel caso in cui $\cos\zeta$ sia negativo, si troveranno per la curva del pelo d' acqua quattro consimili rami; se non che i rami che prima erano situati dalla parte delle ascisse positive passeranno dalla parte delle ascisse negative e viceversa. Egualmente che nel caso del fondo declive due soli rami possono rappresentare la curva del pelo d' acqua che resta superiore allo stesso fondo del canale. Tale curva verrà più precisamente rappresentata pel caso del fondo acclive dal ramo dato dalla seconda radice di z' che riuscirà anch' esso acclive, se nella sezion all' origine delle coordinate si avrà $a \sin\zeta < \frac{v^2}{g}$; e dal ramo dato dalla 3.ª radice di z' che risulterà invece declive se nella stessa sezione sarà $a \sin\zeta > \frac{v^2}{g}$.

La suesposta soluzione del sig. Mossotti è fondata nel supposto di $pdx + rdz$ differenziale esatto. È però da notarsi che lo stesso sig. Mossotti in una se-

---

Elementi di Meccanica e d' Idraulica del sig. Venturoli. Edizione seconda. Tom. 2.°, pag. 127; e la *Memoria* del sig. Bidone intitolata: *Expériences sur le remou et sur la propagation des ondes*, che si trova inserita nel tom. XXV delle Memorie dell'Accademia Reale delle Scienze di Torino.

parata *Aggiunta* alla sua succennata Memoria ha anche trattato e risoluto lo stesso caso di movimento dell' acqua prescindendo da una tal condizione che restringe il problema. In quell' Aggiunta partendo immediatamente dalle formole degli art. 9, 10.... 15 della Sez. XI della *Meccanica Analitica* si arriva pure a determinare il moto permanente dell' acqua nei canali di forma parallelepipeda e poco inclinati alll' orizzonte. Il calcolo richiesto per questa soluzione più generale viene ivi condotto al punto che l' applicazione sua a casi speciali della pratica non presenta più che le difficoltà dell' integrazione di funzioni con una sola variabile e della risoluzione di equazioni ad una sola incognita. Siffatte integrazioni e risoluzioni vi vengono poi a dipendere dalla natura di una funzione indicata dal Mossotti con $F'(z)$ e che rappresenta la velocità di un punto qualunque corrispondente all' ordinata z in una sezione data del canale, in cui si è supposta l' origine delle ascisse. Quindi se si prende per la funzione $F'(z)$ una costante, il che corrisponde al caso che l' acqua si introduca nella sezione all' incile con una velocità costante in tutti i punti, si ricasca nelle formole della soluzione fondata nella supposizione che $pdx + rdz$ sia un differenziale esatto. Dunque, come già osservò il sig. Mossotti, questa supposizione analitica corrisponde alla condizione fisica che l' acqua entri nella tratta di canale che si considera con una velocità eguale in tutti i punti della sezione all' origine.

Posto invece che l' acqua si presenti alla prima sezione del canale con una velocità parallela al fondo che cresca o cali proporzionatamente all' altezza z di modo che v rappresentando la velocità sul fondo ed ε essendo un coefficiente costante, questa velocità sia espressa dalla formola $v+\varepsilon z$, in tale ipotesi si trovano col Lagrange, art. 14, e col calcolo del sig. Mossotti per le velocità d' un punto qualunque $\frac{d\chi}{dz}$, $-\frac{d\chi}{dx}$ secondo gli assi delle x e delle z le espressioni:

$$\text{(e)} \qquad \frac{d\chi}{dz} = \omega + \varepsilon z$$

$$\frac{d\chi}{dx} = z \cdot \frac{d\omega}{dx}$$

e per l' equazione della curva del pelo si ha

$$\frac{1}{2}\left(Q:l - \frac{1}{2}\varepsilon z'^2\right)^2 - z'^2\left(\frac{v^2}{2} - \varphi(0) + gx\cos\zeta\right) = g\sin\zeta \cdot z'^3$$

in cui $\varphi(o)$ è una costante arbitraria. Si chiami $-a$ l'altezza z' del pelo di acqua nella prima sezione, e si osservi che per questa sezione si ha $x = o$, $\omega = v$ e $Q : l = -va + z\,\varepsilon a^2$. Sostituendo si trova $\varphi(o) = -ga\,sin\zeta$ onde sarà

$$g\,sin\zeta \cdot z'^3 = \frac{1}{2}\left(Q : l - \frac{1}{2}\varepsilon z'^2\right) - g z'^2 \left(\frac{v^2}{2g} + a\,sin\zeta + gx\,cos\zeta\right)$$

Quest' equazione appartiene ad una linea del 4.° ordine del genere CXLIII. (*vedi Eulero. Introd. all' analisi degli infin.*) la quale ha 4 rami infiniti che si estendono dalla parte delle ascisse positive, due iperbolici di cui l'assintoto è rappresentato dall'equazione $z'^2 = \frac{Q}{2g\,lx\,cos\zeta}$ e due parabolici dell'assintoto dato da $z'^2 = \frac{8g}{\varepsilon} \cdot x\,cos\zeta$. Un solo de' rami corrispondenti a ciascun assintoto si troverà dalla parte delle ordinate negative, che sono le uniche che corrispondono alla curva situata sopra il terreno; così due soli rami potranno rappresentare la curva direttrice della superficie cilindrica del pelo d' acqua nel canale aperto superiormente. Se la differenza fra la velocità del fondo e della superficie, come spesso può dagli sperimenti risultare, sarà piccola, il coefficiente ε sarà pure piccolo, ed allora trascurando il quadrato di ε e sostituendo al rapporto $Q : l$ il suo valore $-va + \frac{1}{2}\varepsilon a^2$ la precedente equazione si potrà ridurre a

$$z'^3 + x\,cot\zeta \cdot z'^2 + \frac{1}{sin\zeta}\left(a\,sin\zeta + \frac{v^2}{2g}\left(1 - \frac{\varepsilon a}{v}\right)\right) z'^2 = \frac{a^2}{sin\zeta} \cdot \frac{v^2}{2g}\left(1 - \frac{\varepsilon a}{v}\right)$$

la quale è affatto simile alla suesposta per il caso soggetto alla condizione del differenziale esatto, se non che qui l'altezza $\frac{v^2}{2g}$ è rimpiazzata da $\frac{v^2}{2g}\left(1 - \frac{\varepsilon a}{v}\right)$. Con questa leggiera modificazione tutte le conseguenze ricavate di sopra per il caso ristretto dalla mentovata condizione del differenziale esatto saranno applicabili anche al caso più generale qui accennato. Inoltre l' equazione segnata (e) ci mostra che per questo caso la stessa legge di velocità che sussiste nella sezione all' origine delle coordinate sussiste in tutto il corso del canale.

Arrestandosi a questo punto le considerazioni dei geometri sulla teoria del movimento dell' acqua nei canali, esse si riducono ancora alla soluzione del problema molto semplice che offre un canale di forma rettangola e poco inclinato all' orizzonte in cui l' acqua scorre con moto permanente. Niuno per con-

seguenza, che da noi si sappia, ha sinora risolto alcun caso teorico del moto dell' acqua nei canali non per anco ridotto a stato di permanenza. Anzi il problema del moto permanente nei canali non era neppur risolto in tutte le possibili combinazioni de' suoi dati e delle sue incognite. Difatti le anzidette soluzioni del sig. Mossotti abbracciano la sola combinazione in cui oltre la condizione della pression costante alla superficie dell'acqua essendo dato il fondo del canale supposto rettilineo e poco incliuato all' orrizzonte, si cerca la curva del pelo e tutti gli altri elementi del moto. Ora potrebbe darsi che nella parità delle altre circostanze il moto permanente dell' acqua si facesse in un canale col fondo assai inclinato all' orizzonte, oppure che si trattasse di determinare gli accidenti del moto di una massa d' acqua corrente in un canale di fondo sconosciuto e col pelo disposto sotto una data curva. In quest'altra combinazione di dati e di incognite il problema del moto dell' acqua rimaneva tuttora da risolversi; per cui qui passeremo a soggiungerne l'esatta soluzione che se ne ricava dagli stessi principj contenuti nella Sez. XI della *Meccanica Analitica* e che servirà così come di necessario compimento della suesposta teorica sul moto permanente dell' acqua nei canali rettangolari.

CAPO III.°

Del moto dell' acqua che si dispone nei canali con una data curva di pelo.

Nella teoria del moto dell' acqua dopo l' esempio dei casi finora trovati solubili egli è abbastanza comprovata la legittimità e la convenienza di restringersi per l' oggetto delle pratiche applicazioni alla considerazione del moto dell' acqua in un piano, anzichè proporsi la soluzione del problema più generale che abbraccia la determinazione del moto dell' acqua secondo tre coordinate, vale a dire nello spazio. Si consideri adunque riferito il moto di questo fluido grave ed omogeneo a due sole coordinate, come pur si richiede quando la corrente si faccia in un canale colle sponde piane, verticali e parallele e suppongasi che il detto moto dell' acqua sia già ridotto allo stato di permanenza talchè risulti indipendente dal tempo. Per la determinazione di tale moto attenendosi qui alle denominazioni ed ai principj della Sezione XI, *Mecc. Analitica* di Lagrange, si hanno nel caso di $pdx + rdz$ differenziale

esatto le seguenti formole:

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

$$p = \frac{d\varphi}{dx} \qquad\qquad r = \frac{d\varphi}{dz}$$

$$\lambda = V + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + c$$

notando con c una costante indipendente dal tempo.

Queste formole servono a determinare compiutamente il moto permanente dell' acqua in un canale sì nel caso risolto dai signori Tadini e Venturoli colla condizione delle due pareti date agli estremi del fluido, che nell'altro caso trattato dal sig. Mossotti colla condizione della pressione costante alla superficie dell' acqua e coll' altro *dato* del fondo del canale. Si potrebbe però dubitare che le stesse formole non valessero egualmente a risolvere il caso in cui si tratta di determinare gli accidenti del moto di una massa d' acqua corrente in un canale di fondo sconosciuto e col pelo disposto sotto una data curva. In questa combinazione di dati e di incognite, che è assai frequente a verificarsi in natura, il problema rimanendo ancora da risolversi e da applicarsi alla pratica, passeremo qui a soggiungerne l' esatta soluzione che ne sembra derivare facilmente dai sullodati principj della *Meccanica Analitica.*

Sia $z = \alpha$ l' equazione della curva del pelo, essendo α una funzione di x senza z nè t. Con questo dato e coll' altro della pression costante alla stessa superficie del fluido si formeranno le due seguenti equazioni che sussistono simultaneamente alla detta superficie esteriore e libera del fluido (*vedansi gli art.* 23 *e* 24 *della suddetta Sezione XI*)

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dz} - \dfrac{d\varphi}{dx}\cdot\dfrac{d\alpha}{dx} = 0 \\[2ex] V + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\varphi}{dz}\right)^2 + c = 0 \end{cases}$$

Queste adunque serviranno a far conoscere primieramente il valore delle due incognite $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ pel moto superficiale dell' acqua.

Si ponga $\qquad \dfrac{dx - dz\sqrt{-1}}{dx + dz\sqrt{-1}} = N; \qquad V = -gx\cos\zeta - gz\sin\zeta$

Essendo poi $\varphi = \Psi(x + \alpha\sqrt{-1}) + \Psi'(x - \alpha\sqrt{-1})$ l'integral completo dell'equazione fondamentale (1) e con $F(x+\alpha\sqrt{-1}), f(x-\alpha\sqrt{-1})$ notandosi i coefficienti differenziali delle funzioni Ψ, Ψ' in esso contenute, si ridurranno le equazioni (2) per il dato limite esteriore del velo fluido a queste

$$Nf(x-\alpha\sqrt{-1}) - F(x+\alpha\sqrt{-1}) = 0$$

$$V + 2F(x+\alpha\sqrt{-1}).f(x-\alpha\sqrt{-1}) + c = 0$$

dalle quali eliminando le due incognite F, f si ottiene, dopo avervi sostituito il valore di V

$$(3) \qquad \begin{aligned} f(x-\alpha\sqrt{-1}) &= \pm\sqrt{\frac{gx\cos\zeta + gz\sin\zeta - c}{2N}} \\ F(x+\alpha\sqrt{-1}) &= \pm\sqrt{\frac{N(gx\cos\zeta + gz\sin\zeta - c)}{2}} \end{aligned}$$

Di qui è che si conosce alla superficie esteriore del velo fluido la forma delle due funzioni arbitrarie f, F costituenti i coefficienti differenziali dell'integral completo per la equazione fondamentale del problema; perciò la forma delle dette funzioni sarà nota per tutta l'estensione del velo fluido, essendo in generale la stessa ed invariabile per tutte le parti del fluido. Diffatti adottando nei valori di f, F il segno $+$ pel caso della corrente nella direzione delle x e delle $\frac{d\varphi}{dx}$ positive, si faccia

$$x - \alpha\sqrt{-1} = s; \qquad\qquad x + \alpha\sqrt{-1} = s'$$

e la risoluzione delle equazioni ci fornirà

$$x = \Phi(s); \qquad\qquad x = \Phi'(s')$$

segnando con Φ, Φ' due funzioni conosciute di s, s'. Indicando inoltre con $V', N'; V'', N''$ il risultato delle sostituzioni, allorchè in luogo di x si pone successivamente $\Phi(s)$ e $\Phi'(s')$ nelle quantità V ed N si avrà

$$f(s) = \sqrt{\frac{-V' - c}{2N'}}$$

$$F(s') = \sqrt{\frac{N''(-V'' - c)}{2}}$$

In queste equazioni rimettendo per s, s' le rispettive quantità generiche in x e z sarà nota realmente la forma generale delle funzioni f, F che da noi

viene marcata per semplicità come segue:

$$f(x - z\sqrt{-1}) = \left(\sqrt{\frac{-V' - c}{2N}}\right)'$$

$$F(x + z\sqrt{-1}) = \left(\sqrt{\frac{N''(-V'' - c)}{2}}\right)''$$

Risostituendo dunque per f, F i trovati valori in x e z nelle equazioni del movimento del fluido pel caso qui considerato, questo movimento verrà ad essere compiutamente determinato.

Per le velocità secondo gli assi delle x e delle z si avranno i valori

$$(4) \quad \begin{cases} p = \left(\sqrt{\frac{-V' - c}{2N'}}\right)' + \left(\sqrt{\frac{N''(-V'' - c)}{2}}\right)'' \\ r = \sqrt{-1}\left\{\left(\sqrt{\frac{N''(-V'' - c)}{2}}\right)'' - \left(\sqrt{\frac{-V' - c}{2N'}}\right)'\right\} \end{cases}$$

La pressione sarà data da

$$(5) \qquad \lambda = V + \frac{1}{2}(p^2 + r^2) + c$$

e per l'equazione della curva descritta da un punto qualunque del fluido velo si avrà

$$(6) \quad o = \frac{dx - dz\sqrt{-1}}{dx + dz\sqrt{-1}}\left[\left(\sqrt{\frac{-V' - c}{2N'}}\right)'\right] - \left(\sqrt{\frac{N''(-V'' - c)}{2}}\right)''$$

nella quale segnando con z' l'ordinata del fondo del canale si ha l'equazione di quest'altra linea estrema del velo fluido che deve corrispondere e diventar identica coll'equazione della figura del fondo desunta dalle misure dirette, se pur si vuole attenersi anche qui alla supposizione generalmente adottata che le molecole fluide situate una volta alle linee estreme del fluido velo vi restino adjacenti per tutta la durata del movimento nel tronco di canale considerato (*).

Le formole qui sopra riferite sono generali pel moto dell'acqua nei canali qualunque sia la disposizione delle coordinate rettangole relativamente

(*) Vedi Lagrange *Meccanica Analitica*, Sez. XI. art. 24.

al corso d' acqua che si considera purchè siano prese per positive le ascisse x e le velocità $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$ nel senso della corrente e siano ritenute per positive le ordinate z e le velocità $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)$ nel senso della gravità. Inoltre valgono le stesse formole per qualunque curva di pelo ossia per qualunque data superficie esteriore e libera dell' acqua; ma poichè nel caso nostro la costante osservazione ci avverte che la superficie dell' acqua corrente nei canali ordinarj è fisicamente piana, così onde mostrare qui come si possa svilupparle sino agli ultimi dettagli della pratica applicazione sceglieremo per l' esempio più utile e più semplice ad un tempo quello dell' acqua che si muove in un canale colle sponde piane, verticali e parallele, col pelo disposto in una data linea retta comunque inclinata all' orizzonte, cosicchè, prendendosi su questa retta l' asse delle x, si abbia per l' equazione del pelo d' acqua $z = 0$. Le particelle scorrenti lungo l' asse delle x mai non deviando dal medesimo, di modo che posto $z = 0$ viene $r = 0$ e $V = -gx\cos\zeta$, sarà $F(x) = f(x)$ ed uma sola di queste funzioni resterà da determinarsi. Facendo dunque le opportune sostituzioni nelle formole surriferite, risulterà per questo caso di movimento dell' acqua nei punti situati alla superficie libera

$$F(x) = f(x) = \pm\sqrt{\frac{gx\cos\zeta - c}{2}}$$

ed in generale per ogni punto del velo fluido

$$F(x \pm z\sqrt{-1}) = \pm\sqrt{\frac{g\cos\zeta(x \pm z\sqrt{-1}) - c}{2}}$$

laonde sarà

$$(4)' \quad \begin{cases} p = \pm\sqrt{\frac{1}{2}gx\cos\zeta - \frac{c}{2} + \frac{1}{2}gz\cos\zeta\sqrt{-1}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}gx\cos\zeta - \frac{c}{2} - \frac{1}{2}gz\cos\zeta\sqrt{-1}} \\ r = \sqrt{-1}\left\{\pm\sqrt{\frac{1}{2}gx\cos\zeta - \frac{c}{2} + \frac{1}{2}gz\cos\zeta\sqrt{-1}} \mp \sqrt{\frac{1}{2}gx\cos\zeta - \frac{c}{2} - \frac{1}{2}gz\cos\zeta\sqrt{-1}}\right\} \end{cases}$$

$$(5)' \quad \lambda = -gx\cos\zeta - gz\sin\zeta + \frac{1}{2}(p^2 + r^2) + c$$

e per l' equazione della curva descritta da un punto qualunque di fluido si avrà

$$(6)' \cdots 0 = \frac{dx - dz\sqrt{-1}}{dx + dz\sqrt{-1}} \cdot \left\{ \pm \sqrt{\frac{1}{2} gx \cos\zeta - \frac{1}{2} c - \frac{1}{2} gz \cos\zeta \sqrt{-1}} \right\} \mp \sqrt{\frac{1}{2} gx \cos\zeta - \frac{1}{2} c + \frac{1}{2} gz \cos\zeta \sqrt{-1}}$$

Le ritrovate espressioni finite di p ed r, a motivo delle quantità irrazionali e dell' immaginaria $\sqrt{-1}$ che contengono, sono della forma della radice cubica di una quantità reale nel caso che si chiama *irreducibile*; perciò l' aspetto immaginario sotto cui si presentano non potrà togliersi dalle medesime espressioni che per mezzo dello sviluppo in serie. Eseguendo questo sviluppo col porre per semplicità $\frac{1}{2} gx \cos\zeta - \frac{1}{2} c = A$; $\frac{1}{2} gx \cos\zeta = B$, si otterrà dopo fatte le riduzioni

$$(7) \quad \begin{cases} p = \pm \sqrt{A + B\sqrt{-1}} \pm \sqrt{A - B\sqrt{-1}} = \pm 2 A^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{B^2}{A^2} - \frac{5}{2} \left(\frac{1}{8} \frac{B^2}{A^2} \right)^2 + \frac{7 \cdot 9}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{8} \frac{B^2}{A^2} \right)^3 - ec. \right\} \\ r = \sqrt{-1} \left\{ \pm \sqrt{A + B\sqrt{-1}} \mp \sqrt{A - B\sqrt{-1}} \right\} = \mp \frac{B}{A^{\frac{1}{2}}} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{B^2}{A^2} + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{B^2}{A^2} \right)^2 - \frac{9 \cdot 11}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{B^2}{A^2} \right)^3 + ec. \right\} \end{cases}$$

Riteniamo pertanto che se vogliamo applicare il caso risoluto dai signori Venturoli e Tadini al moto dell' acqua nei canali si assumono come dati e conosciuti sì il fondo che la curva del pelo d' acqua, e che in quello contemplato dal sig. Mossotti si suppone noto soltanto il fondo per ricavare poi dall' analisi la curva del pelo. Invece nel presente caso supposta data questa curva del pelo siamo arrivati a stabilire i valori esatti di p ed r. Laonde si potranno anche ricavare le espressioni esatte per serie degli elementi della velocità assoluta e della pressione di un punto qualunque del velo fluido cioè

$$(8) \; \cdots\cdots \; U = \pm \sqrt{p^2 + r^2} = \pm \sqrt{4A \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{8} \frac{B^2}{A^2} - \frac{5}{2} \left(\frac{1}{8} \frac{B^2}{A^2} \right) + \frac{7 \cdot 9}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{8} \frac{B^2}{A^2} \right)^3 - ec. \right\}^2 + \frac{B^2}{A} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \frac{B^2}{A^2} + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{8} \frac{B^2}{A^2} \right)^2 - \frac{9 \cdot 11}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{8} \frac{B^2}{A^2} \right)^3 + ec. \right\}^2}$$

$$(9) \; \cdots\cdots \; \lambda = - gx \cos\xi - gz \sin\xi + \frac{1}{2} \left[4A \left\{ 1 + \frac{1}{8} \frac{B^2}{A^2} - \frac{5}{2} \left(\frac{1}{8} \frac{B^2}{A^2} \right) + \frac{7 \cdot 9}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{8} \frac{B^2}{A^2} \right)^3 - ec. \right\}^2 + \frac{B^2}{A} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \frac{B^2}{A^2} + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{8} \frac{B^2}{A^2} \right)^2 - \frac{9 \cdot 11}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{8} \frac{B^2}{A^2} \right)^3 + ec. \right\} \right] + c$$

Sostituiti poi gli stessi valori di p ed r nell' equazione differenziale della curva descritta dal punto qualunque di fluido, passando alla di lei integrazione ed

estendendo in questo la x fino al dato valore dell'ascissa estrema del velo fluido, verrà in ogni caso ad esser nota la corrispondente ordinata da cui dipende la figura del fondo.

Detta Q la quantità dell'acqua passante per una sezion qualunque normale alla direzione del pelo d'acqua sarà espressa in generale da

$$(9)' \qquad Q = l\int p dz$$

chiamata l la larghezza costante del canale.

Per le questioni sul moto dell'acqua nei canali ordinarj essendo questi di dimensioni assai più grandi in lunghezza che in profondità si avrà in poca distanza dal principio del velo fluido di cui si considera il moto $x > z$ e per conseguenza $A > B$; dunque le suddette serie risulteranno convergenti e quindi serviranno a dare con pochi termini i valori approssimati di p ed r non che degli altri elementi del moto per la soluzione dei relativi problemi che si possono offrire.

Arrestandoci a valutare i primi termini delle serie surriferite per una prima approssimazione, si avranno le seguenti formole del moto dell'acqua nei canali:

$$(10) \qquad \begin{aligned} p &= \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \sqrt{2gx\cos\zeta - 2c} \\ r &= \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) = -\frac{gz\cos\zeta}{\sqrt{2gx\cos\zeta - 2c}} \\ U &= \sqrt{p^2 + r^2} = \sqrt{2gx\cos\zeta - 2c} \\ \lambda &= -gz\sin\zeta \\ \frac{dz}{dx} &= -\frac{gz\cos\zeta}{2gx\cos\zeta - 2c} \end{aligned}$$

Quest'ultima equazione integrata dà

$$-2\log z = \log.(2gx\cos\zeta - 2c) + \log. C$$

indicando con C un'altra costante arbitraria diversa da c. E passando dai logaritmi ai numeri si ha per l'equazione generale della linea descritta da ciascun punto del fluido

$$(11) \qquad z^2 = \frac{1}{C(2gx\cos\zeta - 2c)}$$

Passiamo a determinare i valori delle costanti arbitrarie c, C comprese nelle formole suesposte. A tale effetto possiamo servirci dei dati che le esperienze istituite sul canale ci fanno direttamente conoscere. Così notando con v la velocità secondo l'asse delle ascisse x al punto sulla linea del pelo che resta distante dall'origine delle coordinate d'una quantità a, sarà per la prima delle equazioni (10)

$$v = \sqrt{2ga \cos\zeta - 2c}$$

d'onde si cava

$$c = \frac{2ga \cos\zeta - v^2}{2}$$

Sostituendo poi per c il suo valore e facendo $z = a$ quando è pure $x = a$ nell'equazione (11) della linea descritta da un punto qualunque, si otterrà per l'altra costante C il valore

$$C = \frac{1}{a^2 v^2}$$

Con questi valori per c, C l'equazion della curva descritta da un punto qualunque del fluido in moto diventa

$$z^2 = \frac{a^2 v^2}{2g(x-a)\cos\zeta + v^2} \tag{12}$$

Se si distingua con z' ed a' le ordinate del fondo del canale corrispondenti alle ascisse x ed a, si avrà similmente per l'equazion della curva descritta da ciascun punto che rade il fondo la seguente:

$$z'^2 = \frac{a'^2 v^2}{2g(x-a')\cos\zeta + v^2} \tag{12'}$$

la quale ci farà conoscere per ogni caso la figura del fondo del canale e diverrà identica pel valore di z' desunto dalle misure dirette se, come fu supposto per il pelo d'acqua, deve pur verificarsi anche a questo fondo la condizione che si assume generalmente pel moto dell'acqua lungo ciascuna parete del recipiente o linea estrema del velo fluido. Le altre formole del moto si riducono colla sostituzione de' valori di c, C alle seguenti:

$$(13)\quad \begin{cases} U = p = \sqrt{2g\left[(x-a)\cos\zeta + \dfrac{v^2}{2g}\right]} \\[2ex] r = -\dfrac{gz\cos\zeta}{\sqrt{2g\left[(x-a)\cos\zeta + \dfrac{v^2}{2g}\right]}} \\[2ex] \lambda = -gz\sin\zeta \end{cases}$$

Finalmente in luogo di una delle quantità a e v si può anche introdurre la portata del bacino o canale perchè, se si chiama Q questa portata ed l la larghezza costante del canale, a motivo che p nelle suddette formole riesce indipendente da z e perciò costante per tutti i punti della stessa sezione, si ha ne' limiti sempre della suddetta prima approssimazione

$$(14) \qquad Q = lav$$

L'equazione (12) appartiene ad una linea di terz'ordine e dà immediatamente pel valore di z la formola irrazionale

$$(15) \qquad z = \pm \frac{av}{\sqrt{2g(x-a)\cos\xi + v^2}}$$

cioè si hanno in generale per z due valori eguali e contrarj ossia l'uno positivo e l'altro negativo. Questi possono dunque rappresentare nella curva le due ordinate corrispondenti a qualunque valore di $x > a$. Tale curva sarà simmetrica relativamente all'asse delle x ed avrà quattro rami del genere *iperbolico*, cioè due della parte delle x positive, e due altri dalla parte delle x negative.

Per fare la costruzione geometrica della curva sia, figura I.ª, il pelo dell'acqua del canale rappresentato dalla retta indefinita AB. Se dal punto O origine delle coordinate si prende una porzione OX eguale all'ascissa $x = a$ e dal punto X si guida ZXZ' perpendicolare alla retta AB e sulla quale si segnano $XZ = XZ' = a$, i punti Z, Z' saranno sulla curva e potranno considerarsi come le origini dei due rami suddetti dalla parte delle ascisse positive. L'angolo ξ è l'angolo che la verticale prolungata in basso fa colla retta AB che rappresenta il pelo d'acqua. Quando il pelo d'acqua è declive sarà $\cos\xi$ positivo come sin qui si è supposto. Se dunque partendo dal punto X facciamo che x varj nella direzione delle coordinate positive, essendo $\cos\xi$ positivo, la quantità $2g(x-a)\cos\xi + v^2$ diventerà maggiore di v^2 ed in conseguenza il valore di z dato dalla (15) minore di $z = a$, finchè fatto $x = \infty$ risulterà $z = 0$, cioè i rami della curva dalla parte delle ascisse positive andranno accostandosi all'asse delle stesse ascisse ossia al pelo d'acqua come ad un assintoto. Se invece partendo dal punto X' corrispondente al valore $OX' = OX = a$ dalla parte delle ascisse negative facciamo variare l'ascissa x, essendo ancora $\cos\xi$ positivo, la quantità $2g(x-a)\cos\xi + v^2$ diventerà mi-

nore di v^2 onde crescerà il valore di z dato dall'equazione (15). Da questa parte la $(x-a)$ non potendo però variare fuori dei limiti di $(x-a)=0$, ed $(x-a)=\frac{v^2}{2g\cos\xi}$ senza dare per z dei valori immaginarj, ne risulta che i due rami corrispondenti della curva rappresentati dalla suddetta equazione (15) saranno discontinui e finiti, anzichè continui ed infiniti.

Dei quattro rami di curva della figura I.ª è evidente che possono esprimere la superficie dell'acqua nel canale soltanto quei due che restano inferiori alla retta del pelo d'acqua, mentre gli altri due si trovano fuori degli estremi del velo fluido in moto qui considerato. Le ordinate dei due rami da usarsi sono date dal solo valore positivo di z in ambedue in casi, cioè secondo che si verifica il caso della corrente dalla parte delle x positive o negative. Onde distinguere quale valore positivo di z ossia quale dei due rami di curva $Z'B$, $Z'''D$ converrà impiegare secondo i diversi casi, basta osservare che al punto X appartenente all'ascissa x dalla parte delle ascisse positive corrisponde l'ordinata a colla velocità v e che discendendo nel canale lungo il pelo d'acqua l'altezza $z'\sin\xi$ va sempre diminuendo nel ramo $Z'B$, mentre dal punto Z''' verso D del ramo $Z'''D$ la corrispondente altezza d'acqua va crescendo, e viceversa la velocità dell'acqua va aumentando nel 1.° ramo e diminuendo nel 2.°

Se si istituiscono delle considerazioni simili nel caso che il canale sia col pelo acclive, cioè nel caso in cui $\cos\xi$ sia negativo, si troverà che i quattro rami della curva sono in questo caso rappresentati dalla fig.ª II.ª del tutto simile alla fig.ª I.ª, se non che al luogo dei rami che prima erano continui od infiniti sono subentrati i discontinui o finiti e viceversa. Egualmente che nel caso del pelo d'acqua declive i soli due rami che restano sotto il pelo d'acqua possono rappresentare la curva descritta da un punto qualunque del fluido e perciò anche la curva del fondo del canale, la quale sarà rappresentata dal ramo $Z'''D$ o $Z'B$ secondo che l'altezza d'acqua andrà crescendo o diminuendo nel senso della corrente, e viceversa la velocità.

Qui cade in acconcio di osservare che le ritrovate formole del moto dell'acqua nei canali di fondo incognito si ricavano pur anche attenendosi al succitato metodo delle serie di Lagrange, facendo più specialmente uso dell'analisi del sig. Mossotti da noi riferita nell'antecedente Capo, analisi che vale però soltanto pel caso del fondo e del pelo d'acqua poco inclinato all'orizzonte.

Infatti suppongasi che la curva del pelo d' acqua nel canale sia la linea retta che rappresenta l' asse delle x e che il valore di φ si possa esprimere con una serie della forma $\varphi = \varphi' + z\,\varphi'' + z^2\,\varphi''' +$ ec. nella quale φ', φ'', φ''' ec. siano funzioni di x senza z e l' una successivamente minore dell' altra. Con quest' ultima condizione da verificarsi *a posteriori* ed essendo $z = 0$ l' equazione della linea del pelo d' acqua, l' altra equazione perchè stieno sempre le stesse particelle contigue a questa linea estrema diverrà, facendo le opportune sostituzioni e riduzioni nelle formole del Lagrange (*vedi l' articolo 26 della Sezione XI*)

$$\varphi'' = 0$$

d' onde si ricava per l' articolo 25 Sezione XI

$$\varphi^{\text{IV}} = 0,\ \varphi^{\text{VI}} = 0 \quad \text{ec. ec.}$$

e quindi per gli stessi articoli 25 e 26, arrestandosi coll' assunta serie ai termini dell' ordine $z^2\,\varphi'''$

$$
(16) \qquad
\begin{aligned}
\varphi &= \varphi' - \frac{z^2}{2}\,\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\\
p &= \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi'}{dx}\\
r &= \frac{d\varphi}{dx} = -\,z\,\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\\
\lambda &= -gx\cos\zeta - gz\sin\zeta + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2 + c
\end{aligned}
$$

Inoltre l' equazione data dalla pression costante in superficie essendo $\lambda = 0$ sarà per l' articolo 27 Sezione XI della forma

$$0 = -gx\cos\zeta + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2 + c$$

che risoluta relativamente a $\frac{d\varphi'}{dx}$ dà per ciascun punto del fluido

$$(17) \qquad p = \frac{d\varphi'}{dx} = \pm\sqrt{2gx\cos\zeta - 2c}$$

cioè il valore per la velocità secondo l' asse delle x che si è già trovato coll' altro metodo da noi usato di sopra per arrivare alle equazioni (10). Da questo valore di p si deducono poi facilmente per mezzo delle (16) gli altri valori di r, U, λ non che l' equazione della curva descritta da un punto qua-

lunque del fluido. Tali elementi risultano del tutto eguali a quelli espressi dalle (10) e (11); se non che tutte le formole ritrovate con questo metodo sono dedotte nella supposizione che le equazioni alla superficie libera dell'acqua siano soddisfatte almeno prossimamente dai soli primi termini che abbiamo conservati.

Per verificare quando questa supposizione sussista, faremo osservare col sig. Mossotti che tutti i termini che abbiamo trascurati contengono delle potenze e delle differenziali della quantità $\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\right)$. Ora colla successiva differenziazione dell' equazione (17) si trova:

$$\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\right) = \frac{g\cos\xi}{p}$$

$$\left(\frac{d^3\varphi'}{dx^3}\right) = -\frac{g^2\cos^2\xi}{p^3}$$

$$\left(\frac{d^4\varphi'}{dx^4}\right) = \frac{3g^3\cos^3\xi}{p^5}$$

$$\left(\frac{d^5\varphi'}{dx^5}\right) = -3.5\,\frac{g^4\cos^4\xi}{p^7}$$

Ne' canali ordinarj la pendenza del pelo è rare volte $> \frac{1}{1000}$ della lunghezza, onde sarà quasi sempre $\cos\xi < \frac{1}{1000}$. Le potenze e le differenziali della quantità $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ saranno quindi successivamente più piccole, come contenenti un moltiplicatore di potenza di $\cos\xi$ successivamente più alta, a meno che la quantità componente i divisori non abbia un valor molto piccolo e paragonabile a $\cos^{\frac{1}{2}}\xi$. Siccome poi la velocità p ne' corsi d'acqua che qui si considerano è per lo più assai maggiore d'un $\frac{1}{10}$ di metro per minuto secondo di tempo, così i termini trascurati saranno sempre frazioni trascurabili per questa sorta di questioni di pratica, ed anche il metodo lagrangiano sarà applicabile per ricavare le formole del moto dell'acqua se non sempre nel caso qui sopra considerato de' canali col pelo d'acqua comunque inclinato, almeno nel caso de' canali poco inclinati all'orizzonte.

Si comprende poi che, tanto seguendo l'uno che l'altro metodo, si potrebbero spingere innanzi le approssimazioni col calcolo de' termini successivi, sebbene ne risulterebbero forse delle formole talmente complicate che non sarebbero di nessun uso nelle pratiche applicazioni.

Le proposte formole verranno dunque a rappresentare il moto del velo fluido che si estende sotto il dato pelo rettilineo del canale recipiente, essendo il fondo di questo incognito di figura e quello, ossia il pelo, comunque inclinato all'orizzonte.

Vediamo ora quali proprietà fisiche nel moto dell'acqua si racchiudono sotto il simbolo delle suddette espressioni algebriche che abbiamo dedotto arrestandoci ne' termini di una prima approssimazione. E primieramente si osservi che si ottiene qui pure per la velocità p secondo l'asse delle x un valore indipendente da z come ha luogo anche nel caso contemplato dal signor Mossotti entro i limiti della prima approssimazione. Avendosi poi $\frac{v^2}{2g}=h$, detta h l'altezza *dovuta* alla velocità v, sarà

$$p=\sqrt{2g\left[(x-a)\cos\zeta+h\right]}$$

in cui, com'è facile a vedersi colla considerazione d'un Δ^{lo} rettangolo, $(x-a)\cos\zeta$ rappresenta la pendenza del pelo d'acqua. Di qui è che le velocità dell'acqua corrispondenti ai diversi punti del velo fluido secondo la direzione principale della corrente si potrebbero bensì rappresentare per mezzo della *parabola*, cioè la velocità p corrispondente al punto x sarebbe eguale alla velocità *dovuta* all'altezza $(x-a)\cos\zeta+h$, ma non si potrebbero egualmente rappresentare colla *parabola* le velocità che secondo l'altra direzione della corrente competono invece ai punti situati alle diverse profondità sotto la superficie libera, come dietro l'ipotesi del *moto lineare* s'insegnava dagli idraulici italiani nello scorso secolo e come credesi tuttora da quegli idraulici de' nostri giorni che ciò ritengono per un principio sicuro ed una regola certa applicabile anche alla misura delle acque scorrenti ne' canali e ne' fiumi. L'espressione di p serve altresì a dimostrare ed a confermare nei limiti della nostra approssimazione la verità della fondamentale proposizione del Guglielmini sul moto dell'acqua nei canali e nei fiumi, com'è stata modificata dal Grandi coll'introduzione della così detta *origine equivalente*, quando però si limiti il discorso alla velocità dell'acqua in superficie e si ritenga come costante quella per tutti i punti situati alle diverse profondità nella stessa

sezione. La velocità r perpendicolare al pelo d'acqua varia invece da un punto all'altro nella ragione composta diretta della distanza orizzontale compresa fra i punti estremi delle coordinate x, z ed inversa dell'altra velocità componente p. Avendo poi la r il segno — sarà la velocità secondo le z diretta da basso in alto nel caso di $\frac{d^2\Phi'}{dx^2}$ positivo e viceversa sarà diretta d'alto in basso nel caso opposto di $\frac{d^2\varphi'}{dx^2}$ negativo. La velocità assoluta è prossimamente eguale alla componente nel senso delle x.

Essendo $\lambda = - gz \sin\xi$ si osserva che $z \sin\xi$ è l'altezza verticale dell'acqua sovrincumbente al livello del punto dell'ordinata z e presa al di sotto dell'orizzontale tirata dall'estremità dell'ascissa x. Dunque nel moto permanente che qui si considera ed entro i limiti della suddetta approssimazione la pressione di un punto qualunque è misurata dal peso della colonna fluida che gli corrisponde verticalmente fra gli indicati due livelli, il che è consimile ma non eguale a quanto ha luogo pei fluidi in equilibrio, cioè fintanto che si può considerare $\sin\xi < 1$ la pressione del punto qualunque è minore di quello che sarebbe se lo stesso punto di fluido, invece di essere in moto, fosse in equilibrio.

L'area elementare della sezione corrispondente all'ascissa x ed all'ordinata z sarà ldz, chiamata l la larghezza costante del canale, e quindi la quantità dell'acqua che nel tempo $= 1$ passerà per il detto elemento di sezione sarà $lpdz$, dinotando p la velocità in direzione perpendicolare al piano della sezione ed eguale per tutti i punti della stessa ordinata z. La quantità dell'acqua che nell'unità di tempo scorrerà dall'intera sezione o che sarà somministrata dalla corrente sarà in questo caso di p costante rapporto a z

$$Q = l\int p\,dz = lpz$$

cioè si avrà il noto teorema del Castelli che resta così dimostrato anche pel caso del presente Capo.

Sostituendo per $2gx\cos\xi + v^2 - 2ga\cos\xi$ il suo valore p^2 nell'equazione (12) della curva descritta da un punto qualunque del fluido in moto e chiamando k l'altezza dovuta alla velocità p come h è quella dovuta a v, si ottengono immediatamente i rapporti

$$\frac{z^2}{a^2} = \frac{v^2}{p^2} = \frac{h}{k}$$

D'altronde dalla stessa equazione (12) si ha

$$(x-a)\cos\xi=\frac{v^2}{2g}\left(\frac{a^2}{z^2}-1\right)$$

dunque sarà il valore della pendenza del pelo d'acqua dalla sezione dell'ascissa a a quella dell'ascissa x

$$(x-a)\cos\xi=h\left(\frac{k}{h}-1\right)=k-h$$

cioè la pendenza del pelo d'acqua da una sezione all'altra sarà in ambedue i casi abbracciati dall'equazione (12) anche qui, come nel problema risolto dal sig. Mossotti, *reciprocamente eguale alla differenza delle altezze dovute alle velocità nelle stesse sezioni*.

Per ciò che riguarda la figura del fondo del canale nel presente caso siamo stati condotti dal calcolo ad una soluzione alquanto semplice, mentre avendo supposto rettilineo il pelo dell'acqua abbiamo trovato essere il fondo relativo rappresentato da un'equazione del 2.° grado composta di due soli termini. Di sopra abbiamo già avuta occasione di far riflettere che nel caso di $\cos\xi$ positivo si ha dall'equazione (12)' pel valore di z' alla linea estrema sul fondo del canale una quantità che decresce al crescere del valore di x, per cui se ne deriva anche la conseguenza che tanto la linea descritta da un punto qualunque come quella descritta dal punto aderente al fondo andranno convergendo colla linea del pelo d'acqua sull'asse delle x più si va al basso verso il termine della corrente considerata, vale a dire il velo fluido o la lama d'acqua andrà assottigliandosi di mano in mano che si discende nel senso della corrente, per cui ad una distanza infinita dalla parte delle ascisse positive il fondo del canale andrà accostandosi al pelo d'acqua come ad un assintoto. Per sapere poi se questa linea del fondo convergente col pelo d'acqua sia anche declive oppure acclive simultaneamente colla stessa linea del pelo d'acqua bisognerà osservare e distinguere i due casi in cui la quantità $(x-a)\cos\xi-(z'-a)\sin\xi$, che rappresenta la differenza di livello dal punto dell'ascissa a a quello dell'ascissa x sul fondo, sia positiva o negativa. Nel 1.° caso sarà il fondo declive e nel 2.° sarà acclive; mentre il pelo d'acqua è declive se $(x-a)\cos\xi$ è positivo, ed acclive se $(x-a)\cos\xi$ è negativo. Che se fosse invece $\cos\xi$ negativo, in allora si avrebbe pel valore di z' una quantità crescente al crescere di x, onde la curva descritta da un punto qualunque e per ciò anche da un punto aderente al fondo

invece di esser convergente colla linea del pelo d'acqua sarebbe divergente. Tale sarà pure la curva del fondo del canale per cui il velo fluido o la lama d'acqua andrà ingrossandosi di mano in mano che si ascende nel senso della corrente, e lo stesso fondo del canale andrà ancora accostandosi al pelo d'acqua come ad un assintoto ma ad una distanza infinita dalla parte delle ascisse negative. Così per l'uso delle ritrovate formole nelle applicazioni della pratica si presentano facilmente le necessarie distinzioni ed avvertenze sopra ogni elemento del moto dell'acqua sia che si tratti di risolvere i problemi che si offrono nella sistemazione de'nuovi canali, sia che s'intenda di spiegare vie meglio i principali fenomeni del corso dell'acqua ne'canali già costrutti. Del resto le formole esposte nel presente Capo come quelle del sig. Mossotti riferite nel Capo antecedente suppongono però sempre che il moto permanente dell'acqua si possa considerare come nel caso del tubo rettilineo o del *regolatore* del sig. Tadini, cioè indipendente dalle resistenze d'attrito e di adesione per modo che queste cause non entrino a modificar sensibilmente l'effetto della gravità sul moto dell'acqua nei canali. Inoltre le stesse formole sono dedotte nell'ipotesi della pression costante in superficie e del differenziale esatto $pdx + rdz$. Con queste restrizioni esse abbracciano nel loro complesso le varie possibili combinazioni di dati e di incognite del problema di determinare il moto permanente dell'acqua in un canale aperto superiormente che abbia le sponde verticali e rettilinee e che lambisca una data linea retta ad uno de'limiti longitudinali del velo fluido. Valgono poi le formole suddette segnatamente a dimostrare che il movimento dell'acqua nei canali in generale dipende e viene determinato sì dal complesso delle forme del fondo e del pelo d'acqua che da altre circostanze agli estremi del canale. Si desume però che queste circostanze del moto non sono tutte egualmente essenziali a renderlo determinato; così quando è data soltanto la curva del fondo del canale colle circostanze all'origine ma senza quelle allo sbocco, non è del tutto determinato il movimento dell'acqua, per essere in tal caso il dato fondo del canale affatto indipendente dalle dette circostanze dello sbocco; ma quando invece è data oltre qualche circostanza all'origine del canale la curva assunta dal pelo d'acqua alla superficie libera, poichè questa dipende direttamente dalle circostanze allo sbocco, il movimento dell'acqua in tutta l'estensione del canale resta pienamente determinato.

Per esempio all'epoca della costruzione del Canale navigabile di Pavia abbiamo veduto messa in campo la questione se il movimento dell'acqua ed il più

o meno di sua velocità fosse da considerarsi dipendente non solo dalla figura assunta in superficie dal pelo d'acqua, ma anche dal fondo assegnato ai diversi tronchi del canale. Ora dal calcolo suesposto è facile il dedurne quanto ha già confermato l'esperienza giornaliera sui tronchi del Canale di Pavia, che cioè conservandosi costanti allo sbocco sì l'altezza della lama d'acqua che la quantità dell'efflusso, il moto dell'acqua (ridotto che sia permanente dopo qualche tempo) non varierà che pochissimo al variar entro certi limiti della sola pendenza del fondo del canale; mentre invece sotto la stessa altezza della lama d'acqua si possono smaltire diversissime quantità d'acque nel canale secondo che mantenuto sempre alla stessa altezza il pelo d'acqua allo sbocco, sarà ivi regolato in tal modo questo pelo dell'acqua da lasciar più o men libero lo sfogo alle escrescenze col movimento delle solite porte laterali al salto immediato del sostegno. Si ritenga che ciò si ottiene qualunque sia la pendenza del fondo, grande o piccola, ed anche nulla. Quindi si osserva che l'altezza della lama d'acqua in tutta l'estensione dei tronchi del Canale di Pavia venne bensì regolata colla misura richiesta per il bisogno della navigazione che vi si fa con barche dell'immersione non maggiore di $0,^{m}75$ e cón qualche decimetro d'aumento per il maggior comodo della stessa navigazione, ma il pelo dell'acqua essendosi disposto ne'varj tronchi di quel canale in una linea assai poco inclinata all'orizzonte, ben poco potè servirvi l'assegnata pendenza del pelo e del fondo per l'oggetto di diminuire il numero ed il salto de' sostegni così detti *conche* destinate ad estinguere la più gran caduta del terreno che si trova sulla linea del canale.

Si riscontra pure nel Milanese un altro esempio dell'accennata poca o niuna influenza della declività del fondo per abilitare un canale a portare all'uopo un maggior corpo d'acqua, ed a diminuire l'altezza dell'unico salto immediato che risultasse eccessiva al suo sbocco, ed è quello dell'alveo del torrente Redefosso che ha finito per istabilirsi sopra un fondo pressochè orizzontale ne' diversi tronchi dall'origine sua fuori di Porta Nuova di Milano sino allo sbocco libero nel fiume Lambro presso Melegnano, mentre disposto dianzi il suo fondo con una notabile pendenza, questa svanì ben presto e si ridusse ad avere il suo letto orizzontale, formato di terra e di altre materie sciolte ed amovibili dall'acqua in moto.

Ma non tutti i canali costruiti o da costruirsi si troveranno nelle anzidette circostanze del Naviglio di Pavia e del Cavo Redefosso. Così i nostri maggiori canali detti il Naviglio Grande, il Naviglio della Martesana e la Muzza

furono disposti in origine e conservano tuttora un' insigne pendenza sì al fondo che al pelo dell' acqua nei differenti loro tronchi; dunque si potrebbe qui confermare col fatto la nuova teoria del moto dell' acqua anche per simili casi, se almeno una sola esatta e completa esperienza fosse stata istituita sopra un tronco regolare di que' canali. Qui sinora noi non conosciamo il risultato di alcuna esperienza od osservazione di questo genere che si possa dir adattata ed applicabile all' uopo nostro. Gli ingegneri della Direzione generale d'acque e strade di Milano hanno bensì rilevato negli scorsi anni il profilo di livellazione dei sunnominati canali; per altro non avendo essi avuto di mira che di conoscere la pendenza superficiale del pelo d' acqua per dedurne quella del terreno laterale e dei punti estremi della linea od altre simili cognizioni, non hanno tenuto conto degli elementi più essenziali del moto da noi sopra considerato, quali sono p. e. la lunghezza dei varj tronchi che vanno soggetti ad una legge differente nel movimento dell' acqua, la pendenza di fondo che corrisponde all' osservata pendenza del pelo, al principio ed al termine di ciascun tronco regolare e continuo, l' altezza e la velocità dell' acqua ne' diversi punti di ciascun tronco ed a diverse profondità sotto la superficie del pelo in date sezioni del canale. Tuttavia ci pare di poter qui aggiungere che per risolvere le varie questioni che si offrono nella pratica costruzione e nell' uso di simili canali saranno molte volte applicabili le formole teoriche suesposte, invece di ricorrere alle solite ipotesi del *moto lineare* e delle *tavole paraboliche*, non che all' uso delle succennate formole *empiriche* che rappresentano con discreta approssimazione al vero la velocità *media* e gli altri elementi del moto dell' acqua in un certo numero di casi simili al proposto.

Allorchè il pelo dell' acqua non ha alcuna pendenza osservabile, ma si dispone in una linea retta orizzontale, come si verifica generalmente ne' tronchi di canale interrotti da frequenti chiuse che sostengono l' acqua a un dato livello e lasciano libero lo sfogo a tutta l' acqua sopravvegnente, si dovrà fare nelle surriferite formole $\cos\xi = 0$, $\sin\xi = 1$ e risulterà primieramente $U = p = v$, cioè il d' altronde noto teorema del sig. Tadini, che in questo caso semplicissimo di movimento dell' acqua la velocità è eguale in tutti i punti della corrente. La pressione $\lambda = -gz$ uguaglia il peso della colonna fluida che sovrincumbe verticalmente al punto considerato come si dimostra per tutti i fluidi in equilibrio. L' equazione della curva descritta dal punto qualunque di fluido dà $z = cost.$ cioè riesce quella di una linea retta parallela al pelo

d'acqua, e tale sarà pure ne' varj tronchi di canale il fondo nel supposto che corrisponda al valore di $z' = a$, altezza dell'acqua in una sezion data. Finalmente detta Q la quantità d'acqua ed l la larghezza del canale, si avrà per la portata $Q = lav$

Tutti questi risultati che si ottengono per gli elementi del moto nel caso di $\cos\xi = 0$, come tanti corollarj, dalle formole particolari (10), (12) e (14), si potevano però ricavare immediatamente anche dalle formole generali (1), (2) e (3); difatti queste danno colla sostituzione di $\cos\xi = 0$, $\sin\xi = 1$ per la superficie dell'acqua

$$N = 1,\ V = 0,\ r = 0,\ F(x) = f(x) = \frac{1}{2}$$

onde per un punto qualunque sarà pure

$$F\left(x \pm z\sqrt{-1}\right) = \frac{1}{2}$$

e perciò si avrà anche di qua $U = p = v$. Trovato questo valore per l'elemento della velocità si ricavano le suesposte espressioni per i valori degli altri elementi λ, z e Q servendosi dell'equazione (9) che dà $\lambda = -gz$. L'equazione (6)' diventa $0 = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}c\right)} - \sqrt{\left(-\frac{1}{2}c\right)}$ cioè si verifica e diventa identica per ogni valor costante di z e perciò anche di $z' = a$, altezza dell'acqua nella sezion data; in fine l'equazione (9)' dà per il valore della portata del canale $Q = lav$, ossia il prodotto della larghezza e dell'altezza della sezion data nella velocità costante, come si è trovato altrimenti di sopra.

CAPO IV.°

Sulla misura e dispensa dell'acqua.

La suesposta teoria del moto permanente dell'acqua ne' canali giova anche a far conoscere con esattezza e precisione la misura delle acque correnti. A questo riguardo convien ritenere che nella dispensa delle acque d'ordinario non si lasciano già libere le bocche aperte in isponda al canal dispensatore,

onde l'acqua vi fluisca a sua posta nella quantità che comporta la sua luce e l'altezza del pelo; ma invece ad ogni bocca per estrazione di acqua si usa il più delle volte di moderarne l'efflusso con opportuna chiavica o cateratta idrometrica, la quale riduca l'acqua a sortire da una luce o modulo sottostante ad una certa altezza di pelo nel medesimo canale dispensatore. Fin tanto che le nostre cognizioni sul moto dei fluidi si limitavano alle teorie dei primi autori desunte dalla supposizione del parallelismo degli strati ossia del moto lineare, si riduceva l'arte di misurare e di distribuire le acque correnti all'uso dei varj meccanismi e stromenti idrometrici che erano più o meno ingegnosi, ma troppo lontani ancora da quella perfezione che si poteva desiderare in un oggetto sì interessante. Essendo poi in questi ultimi tempi arrivati gli idraulici alle surriferite soluzioni sulla teoria delle acque correnti, si è anche immaginato un metodo pratico più rigoroso e più esatto per la misura e la dispensa delle medesime. La nuova maniera di dispensa è quella del *regolatore* proposto dal sig. Tadini e che consiste nel costringere l'acqua corrente in istato permanente a disporsi col pelo orizzontale entro un breve tronco del canale di diramazione fatto ad arte colle sponde piane e verticali e col fondo piano ed orizzontale come la superficie. La più minuta descrizione di questo nuovo metodo di dispensa col confronto di una numerosa serie di esperienze si può riscontrare negli scritti dello stesso sig. Tadini che ne ha trattato di proposito nella succitata sua Opera *Del movimento e della misura* ec. (Mil.° 1816) dopo di averne discorso alquanto nel suo *Ragguaglio matematico* ec. (Mil.° 1815). Ora fra tutti gli altri metodi conosciuti per lo stesso oggetto della misura e della dispensa delle acque correnti meritano senza dubbio la preferenza quelli da secoli usati in Lombardia (*), i quali si riducono invece a far isgorgare l'acqua da una luce di data grandezza e di figura rettangola incisa in un piano verticale che si presenta od immediatamente in isponda del canale od in qualche distanza normalmente alla corrente dell'acqua, e che forma coll'acqua arrestata sopra il labbro supremo della luce quel che suol chiamarsi il *battente*. Per calcolare le quantità assolute dell'acqua in tal modo dispensate hanno pensato da molto tempo gli idraulici italiani di

(*) Vedi la seconda parte della succitata Opera del sig. Tadini, e la Memoria di Vincenzo Brunacci coronata dalla Società Italiana delle Scienze sul quesito da essa proposto «*Quale tra le pratiche usate in Italia per la dispensa delle acque è la più convenevole e quali precauzioni ed artifizj dovrebbero aggiungersi per intieramente perfezionarla, riducendo le antiche alle nuove misure*».

applicarvi la legge della parabola che si osserva negli efflussi d'acqua per luci piccolissime praticate a diverse altezze nelle pareti dei vasi, cioè con questa legge e con un coefficiente costante da determinarsi per esperienza affine di correggere l'effetto della *contrazione della vena* si è potuto dai medesimi idraulici comporre una formola rappresentante la quantità d'acqua che sbocca in un dato tempo da simile luce rettangolare (*). Si ritenga però che l'accordo risultante tra il calcolo parabolico e le esperienze sinora istituite sulla quantità dell'acqua che sgorga dalle luci rettangole di notabile grandezza suppone l'efflusso libero allo sbocco ed il moto dell'acqua nel canale già ridotto a stato di permanenza, come nel caso del *regolatore* del sig. Tadini. Ove manca questa ultima condizione la quantità dell'acqua che sorte dalla data luce non è più costante, ma varia al variare del livello del pelo d'acqua e della velocità nel canale dispensatore. Quando l'acqua in questo canale abbonda ed eccede il bisogno, se ne fa la dispensa e la distribuzione sulla norma del pelo infimo in modo da soddisfare a tutti gli impegni del medesimo canale in questo stato d'acqua e poi si lascia che il soprappiù negli altri stati d'acqua scorra a piacimento dalle bocche di erogazione. Quando invece l'acqua crescente del canale è preziosa per la navigazione interna, per l'irrigazione delle terre, per il movimento degli opificj o per altri bisogni viene sempre regolata la di lei dispensa a giusta misura come se si trattasse della compra e della vendita di qualunque altro oggetto di commercio. A tal fine le aperture praticate per dispensa d'acqua sulle sponde dei grandi canali di Lombardia si trovano munite di un'imposta di legno detta comunemente paratoja o paratora, la quale si può calare e rialzare secondo le vicende del pelo per modo che le quantità d'acqua della dispensa sieno sempre costanti. Siffatto movimento

---

(*) Vedansi fra gli altri libri l'*Uso della tavola parabolica* ec. del De-Regis; gli *Sperimenti idraulici* del Michelotti; la seconda parte anzidetta dell'Opera del sig. Tadini e la Memoria del sig. Bidone nel tomo XXVII degli Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino che ha per titolo: *Experiences sur divers cas de la contraction de la veine fluide, et remarque sur la manière d'avoir égard à la contraction dans le calcul de la dépense des orifices.* Osserveremo qui che il fenomeno della *contrazione della vena*, ossia di quella piega od obbliquità del corso delle vene capillari d'acqua che succede al loro passaggio per una cateratta a bocca aperta è bensì conosciuto *a posteriori* e misurato più o men bene dagli idraulici per esperienza; ma sinora non è stato un tale fenomeno richiamato alla sua vera spiegazione che dipenda dalla rigorosa teoria dell'efflusso dell'acqua dai vasi e dai canali; giova però sperare che nello stato attuale della scienza una tale difficoltà sarà superata quanto prima con qualche nuova soluzione sul moto dell'acqua a due ed a tre coordinate.

della paratora è dunque necessario per la giusta misura dell' acqua ogni qualvolta il canale dispensatore va soggetto ad escrescenze o decrescenze, e si fa d'ordinario a mano o col sussidio di opportuno stromento dal custode delle cateratte. Riesce poi fatto il movimento d'imposta in senso diretto alle mutazioni del pelo se la luce è incisa nel piano della paratora; riesce fatto al contrario in senso inverso alle variazioni del pelo nel canale dispensatore se la luce della dispensa viene formata dal vano che si lascia sotto il labbro infimo della paratora, e da cui l'acqua sbocca come da una cateratta a libera cascata. Nel caso del movimento *diretto* della paratora si renderebbe semplicissimo l'uffizio del custode alle cateratte per la giusta dispensa delle acque, riducendosi all' avvertenza di mantenere costante il battente sul labbro supremo della luce collo spostare la paratora di tanto nè più nè meno quant' è la variazione del pelo. Il movimento *inverso* della paratora è però quello che si pratica ordinariamente per ottenere la portata costante dalle cateratte idrometriche. In questo caso gli assoluti alzamenti od abbassamenti d'imposta per ogni stato d'acqua del canale si potrebbero valutare con una qualche formola desunta dalla teoria del moto dell' acqua nei canali. Quindi si saprebbe anche appostare da un perito la paratora al suo giusto sito senza bisogno di far precedere alcun inutile spostamento a tenore della medesima. Ma volendo rendere vieppiù semplice, spedito e comodo il magistero di questo maneggio della paratora alle bocche d'erogazione si poteva chiedere che l'ufficio del custode alle medesime bocche si riducesse a quello di alzare ed abbassare la stessa paratora di tanto precisamente nè più nè meno di quanto si fosse inversamente abbassato od alzato il pelo nel canale dispensatore, oppure in qualche determinata e semplice proporzione colle dette variazioni di pelo. Ora il celebre Lorgna, che è stato il benemerito fondatore ed il primo presidente della Società Italiana delle Scienze, si è appunto proposto sul cadere dello scorso secolo il problema *di determinare la forma della cateratta idrometrica che dia una portata costante, conservando qualche semplice relazione tra le dette variazioni di pelo e quelle dell' altezza della luce.* Le ricerche fatte dal Lorgna per risolvere una tale questione si trovano registrate nel tomo V degli Atti dell' anzidetta Società; ma poichè il professor Brunacci a pag. 84 della succitata sua Memoria premiata dalla stessa Società ha manifestato di avere qualche dubbio sull' esattezza della soluzione del problema data dal Lorgna, noi ci fermeremo qui ad istituirne il dovuto

esame ed a soggiungere il metodo rigoroso da seguirsi per arrivare, se è possibile, alla soluzione dello stesso problema che tornerebbe utile se non altro in qualche privata incombenza per dispensa di acque correnti.

E cominciando dal riferire un breve cennò dell'analisi del Lorgna, supposta l'acqua stagnante nel canale dispensatore ed appoggiata davanti alla fronte di una cateratta a libera cascata, si tratta di determinare la figura da darsi agli stipiti della medesima onde aver sempre la portata costante col semplice movimento della paratora in senso inverso alle variazioni del pelo ed in una misura o precisamente eguale od in qualche determinata e semplice proporzione colle dette variazioni di pelo.

Posto a tale effetto l'asse delle ascisse x sull'asse verticale di figura della luce, e l'asse delle ordinate y sulla soglia orizzontale della stessa luce; preso il punto di mezzo di questa soglia per l'origine delle coordinate, espressa inoltre con v la velocità onde debbansi intendere animate le stille d'acqua uscenti liberamente dalla luce sotto l'altezza attuale del pelo nel canale dispensatore e chiamato $2ydx$ l'elemento dell'area della luce, talchè l'espressione $2v\int ydx$ eguagli la nota quantità d'acqua costante dell'efflusso che indicheremo con Q, il sig. Lorgna si fece dapprima ad osservare che il valore di v è esprimibile in funzione di x per la nota legge degli efflussi, e pensò quindi si potesse ridurre l'anzidetta espressione di Q a contenere le sole due variabili xy; giacchè, com'egli soggiungeva, la curva degli stipiti deve pur essere tale per le condizioni del problema che sul medesimo asse delle x si abbia da misurare anche l'altezza del pelo, da cui dipendono il battente sul labbro supremo della luce e la velocità v dell'efflusso. Indicando poi con f l'altezza massima a cui può arrivare il pelo d'acqua nel canale sopra la soglia della luce e con z qualunque sua variazione in meno, onde sia $f - z$ l'altezza attuale dello stesso pelo sopra la soglia, ed $f - z - x$ l'altezza attuale del pelo d'acqua sopra la sezione indeterminata della luce, suppose Lorgna nella curva cercata tal proprietà che $f - z - x$ rappresentasse anche l'altezza dovuta alla velocità *media* e ragguagliata v delle stille uscenti, onde secondo la teoria degli efflussi risultasse $v = \sqrt{f - z - x}$, e per conseguenza $Q = 2\sqrt{f - z - x}\int ydx$. Assumendo inoltre per altro supposto che sia $z = n(x - a)$ in cui n denota un numero positivo, e nominando k un coefficiente costante che comprende l'effetto della contrazion della vena fluida ed è da determinarsi coll'esperienza, lo stesso autore stabilisce

per equazione fondamentale del problema l' espressione

$$Q = 2k\sqrt{f - n(x-a) - x} \cdot \int y dx$$

la quale per mezzo della differenziazione dà il valore di y espresso per una funzione di x, onde se ne ricava per l' equazione della curva cercata

$$y = \frac{(n+1) \cdot Q}{2k\left(f - n(x-a) - x\right)\sqrt{f - n(x-a) - x}}$$

Osservando da ultimo che quest' equazione appartiene ad un' iperboloide di cui uno degli assintoti è l' asse delle ascisse, passò Lorgna anche a descrivere per punti la curva degli stipiti della cateratta idrometrica che si era proposto di trovare.

Tale è in sostanza la soluzione del Lorgna; ma se questa soddisfacesse veramente alle condizioni del problema bisognerebbe che introducendo il ritrovato valore di y nell' espressione della Q ed integrandola ne' limiti fissati ad x si ottenesse per Q una quantità costante o indipendente dagli stessi limiti di x. Ora ciò è appunto quello che non avviene, mentre eseguite le accennate operazioni si arriva all' espressione

$$Q = -\log \cdot \frac{f - n(x-a) - x}{f + na}$$

in cui il valore di Q varia evidentemente al variare del limite di x. Per riconoscere l' abbaglio occorso nella succennata soluzione basta riflettere che il valore esatto della velocità *media* introdotta nel calcolo si è (*) $v = \frac{\int y dx \sqrt{f - z - x}}{\int y dx}$ e non già il soprascritto $v = \sqrt{f - z - x}$; mentre quest' ultima espressione rappresenta soltanto il valore della velocità dell' acqua uscente dalla sezione indeterminata della luce cercata. Quindi poteva nemmeno usarsi l' espressione $Q = 2k\sqrt{f - z - x} \cdot \int y dx$ invece di $Q = 2k\int y dx \sqrt{f - z - x}$ poichè in generale la quantità radicale contenuta in questa formola non può essere considerata come costante da portarsi fuori del segno d' integrazione. Di più nella suddetta espressione di Q si trovano di variabili la x che si riferisce alla sezione indeterminata della luce e la z che indica la variazione

(*) Vedi i succitati *Elementi* di Venturoli, tomo II, pag. 62 dell' edizione 2.ª

del pelo d'acqua, da cui dipende l'altezza totale della luce stessa; ma l'una di queste variabili non può esprimersi per mezzo dell'altra, essendo affatto indipendenti fra di loro e potendo variare a piacimento l'ascissa indeterminata della luce senza che varj per ciò il suo limite e viceversa. Concepita che si abbia una tal differenza si vede sùbito che nel calcolo accennato non era in arbitrio di fare $z = n(x - a)$ mentre secondo la condizione del problema dev'essere più esattamente $z = n(a' - a)$, intendendo per a' il limite di x cui va esteso l'integrale nella suesposta formola della quantità d'acqua; ed in conseguenza la curva degli stipiti dev'essere data da

$$y = \frac{(n+1).Q}{2k\left(f - n(a' - a) - x\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Risultando così la y data per una funzione di x ed a' non si poteva descrivere per punti la curva corrispondente come richiede la condizione del problema. Pertanto l'abbaglio della succennata soluzione consiste nell'aver introdotto nel calcolo una velocità per *media* che non è tale e nell'avervi presa l'ascissa indeterminata della luce per l'altezza totale di questa luce che è il limite della stessa ascissa; talchè riuscendo il valore dell'ordinata indipendente da questo limite incognito, sembrava la curva corrispondente descrivibile per punti.

Dalla disamina dell'analisi del Lorgna passando all'indicazione del metodo più rigoroso per la soluzione dello stesso problema, si tratta di trovare una funzione di x e di a' per l'espressione di Q che facendovi $x = 0$ si abbia $Q = 0$ e facendovi invece $x = a'$ si ottenghi $Q = C$, denotando con C una data quantità costante indipendente da a'; simultaneamente poi si deve avere per la figura da darsi alla luce una tale equazione della curva degli stipiti che il valore di y risulti espresso per x senza a' onde la stessa curva si possa descrivere nella formazione della cateratta idrometrica.

Per soddisfare a queste condizioni del problema si faccia la posizione seguente:

$$\text{(a)} \qquad \int y\,dx \sqrt{f - n(a' - a) - x} = f(x, a') + \Psi(x, a')$$

in cui la funzione indicata con f abbia una delle due seguenti forme

$$f(x, a') = C a'^{-m} x^{m} \qquad\qquad f(x, a') = A \log . \frac{x^{m} - a'^{m}(c+1)}{-a'^{m}(c+1)}$$

essendo C, A, c costanti arbitrarie; e la funzione indicata con Ψ sia del-

l'una o dell'altra forma seguente

$$\Psi(x,a')=x^{m}(x-a')^{m}\varphi(x,a');\quad \Psi(x,a')=F(x)+F(a'-x)-F(a')-F(o)$$

essendo nella prima la funzione $\varphi(x,a')$ assoggettata all'unica condizione di non contenere potenze negative di x e nella seconda la F non essendo assoggettata ad alcuna condizione ma esprimendo una funzion qualunque.

Nella espressione di Q dando poi successivamente diversi valori ad y in funzione di x senza a'. ed eguagliando ne' due membri dell'equazione (a) che ne risulta le potenze omologhe di x, come porta il metodo dei *coefficienti indeterminati*, si otterranno per la compiuta determinazione delle funzioni f, Ψ tante equazioni parziali che sussisteranno per tutti i valori di x. Quando tali equazioni siano eguali in numero alle quantità incognite da esse contenute, il problema riuscirà determinato e non rimarrà che di usare dei noti metodi di eliminazione e della teoria delle equazioni per fare sparire ad una ad una tutte le dette incognite e per trovare le radici reali dell'equazione finale che lo risolve. Si osservi poi che nello svolgere i casi che si prestano a questo metodo dei coefficienti indeterminati per la soluzione del problema proposto, invece di restare colla equazione fondamentale agli integrali finiti sarà conveniente il più delle volte di passare ai differenziali primi ed ai quadrati de' suoi due membri all'oggetto di schivare la maggior lunghezza e complicazione del calcolo

Ma l'accennata questione non è la sola di tal genere che si offra da risolversi sulla misura e dispensa delle acque almeno colla teoria del *moto lineare* e dell'efflusso da una bocca libera. Nella *Storia dell' irrigazione del Milanese*, cui stiamo da qualche tempo compilando e che speriamo di poter presto presentare non ostante che alcuni abbiano finora cercato di contrariarne il compimento e di impedirne la pubblicazione, si trova discusso più diffusamente il punto interessante della storia dell'architettura delle acque già citato dal Brunacci e relativo alla suddetta ingegnosa maniera di misurare e distribuire le acque correnti che da molti secoli è conosciuta ed usata in Lombardia. Intanto però crediamo bene di far qui avvertire in prevenzione che la proprietà delle bocche per dispensa d' acque munite del bottino così detto *castello* o *tromba coperta* secondo il metodo magistrale milanese, della quale si parlò a lungo nella Memoria succitata del Brunacci *Quale tra le pratiche ec.* pag. 56 e 62, come risulta dalla predetta Storia

non è altrimenti nuova, ma era benissimo conosciuta anche agli inventori di quel bottino aggiunto all' antico *modello* o *modulo* milanese fin dall' anno 1570, del che ebbe a dubitare il professor Brunacci (*vedi a pag.* 56 *la stessa Memoria*). Di quì si ha la conferma dell' osservazione del benemerito ingegnere Bernardino Ferrari (*) che cioè nel Milanese se non si sapeva anticamente determinare il moto dell' acqua corrente colle leggi della meccanica, si teneva però conto del battente, ossia si aveva riguardo all' elemento della velocità nella misura delle acque correnti assai prima che il celebre Benedetto Castelli di Brescia colle sue opere stampate a Roma ed a Venezia riducesse a forma di proposizioni geometriche le più semplici verità dianzi già conosciute ed applicate nel Milanese alle questioni pratiche sul moto delle acque ne' tubi, ne' canali e ne' fiumi. Difatti per quella proprietà dell' edifizio magistrale che ora è stata procurata anche ad altri metodi ad uso di altre provincie della Lombardia avviene che gli alzamenti di livello nel fiume o canale dispensatore sono molto maggiori dei simultanei alzamenti che vengono a subirvi i così detti battenti delle bocche, ond' è che quando questi ultimi sono di lieve momento non importa di toccare le imposte o paratoje delle cateratte non ostante che si verifichi un alzamento dell' acqua nel fiume. A questo riguardo il sig. Tadini nel suo *Ragguaglio matematico* ec. a facciata 39 si era mostrato di sentimento che il bottino anteposto al bocchello secondo il metodo magistrale non fosse un pregio reale della dispensa d' acqua usata in Lombardia, e che per questo conto, cioè *per ottenere un minore alzamento del battente tutto l'edifizio del modulo sarebbe inutile.* In seguito però il sig. Tadini parlando della misura dell'acqua col mezzo del *regolatore* o della bocca a libera cateratta ha sempre prescritto l' uso del bottino come quello che serve anche per moderare la velocità dell'acqua fluente dal modulo (*vedi la succitata sua Opera* del movimento e della misura delle acque correnti. *Milano* 1816).

Ad ogni modo passiamo qui a dichiarare come noi crediamo che sussista anche l' altro pregio del bottino nell' edifizio magistrale secondo l' asserzione del Brunacci e degli antichi ingegneri milanesi. Non v' ha dubbio infatti, come osservò il sig. Tadini, che tant' acqua può farsi sortire da una bocca scolpita

---

(*) Vedi Opuscoli scelti, tomo II, parte II. Lettera al Conte di Rogendorf *sulle bocche che estraggono acqua dai navigli*, ec.

immediatamente nella sponda del canale dispensatore come ne sorte da un' altra che abbia dimensioni diverse dalla prima e che sia munita dell' edificio magistrale col suddetto bottino interposto fra il bocchello e la sponda del fiume. Basta perciò di assortire le dimensioni del bocchello e del battente nella formola della quantità dell' acqua in modo che si abbia da compensare il loro effetto nella dispensa delle due luci. Egli è inoltre fuor di dubbio la conseguenza dedottane dal sig. Tadini per questo uso, che cioè al crescer dell' acqua nel fiume al di sopra d' un dato livello tanto opererebbe il piccolo aumento di battente nell' edifizio magistrale, quanto un grande aumento nel fiume, l' uno e l' altro producendo un medesimo incremento nella quantità d' acqua tramandata per la rispettiva bocca. Ma questo veramente non è il caso preciso contemplato dagli inventori dell' edificio magistrale ed avvertito ai nostri giorni dal Brunacci; mentre essi consideravano invece che le bocche d' estrazione comunque venissero costrutte avessero però sempre le soglie obbligate ad un dato livello sopra il fondo del canale dispensatore, come lo è in tutti i canali navigabili del Milanese dove d' ordinario sono tenute le dette soglie once otto del braccio di Milano sopra il fondo degli stessi canali affine di riservarsi costantemente in ogni stato del canale l' altezza d' acqua (per lo meno di once quattordici) necessaria alla navigazione e dove non sarebbe per conseguenza permesso di aprire una bocca colla soglia inferiore a questo livello normale ed imprescindibile delle once otto. Si trattava dunque di scegliere fra i limiti dell' altezza viva soprastante delle sole residue once sei le dimensioni più convenienti da assegnarsi alla luce ed al battente delle bocche onde poter dispensar meglio l' acqua a giusta misura tanto nello stato d' acque più basso quanto negli altri stati superiori d' acqua del canal dispensatore. Si trattava inoltre di immaginare un ordigno per regolare facilmente e comodamente la dispensa in modo di conservarla più che fosse possibile inalterata e di misura eguale per tutti gli stati d' acqua del canale. Ora gli antichi ingegneri milanesi destinarono appunto a questo fine *l' edificio magistrale* formato dalla bocca ordinaria in fregio del canale e dal bottino consecutivo così detto il *castello* o *la tromba coperta*; cosicchè per l' *edificio magistrale* sussiste pienamente il teorema che Brunacci dedusse dalla nota teorica dell' efflusso dell' acqua dai vasi attraversati da diaframmi verticali secondo l' ipotesi del *moto lineare;* cioè chiamato α l' altezza dell' acqua nel bottino sopra la soglia del bocchello o modulo, β l' altezza dell' acqua davanti la bocca sopra il fondo del canal dispensatore, a

l'area della luce del modulo, b quella del foro lasciato aperto dell'imposta o paratoja in isponda del canal dispensatore, m quantità indeterminata che esprime l'effetto della *contrazione della vena* e per la quale va moltiplicata la formola della quantità d'acqua che sgorga dalla luce del modulo; m' la consimile quantità per il foro alla sponda del canal dispensatore, le due quantità m, m' essendo da determinarsi per esperienza, la relazione fra le altezze α, β e le aree a, b (in virtù della quale date tre di queste quantità si può subito trovare la quarta) è data dalla seguente (*vedi la succitata Memoria Brunacci a pag.* 63).

$$a^2 m^2 \alpha = b^2 m'^2 (\beta - \alpha)$$

e se fosse $m = m'$ si avrebbe di qui

$$\alpha : \beta - \alpha :: b^2 : a^2$$

cioè le altezze vive dell'acqua sui fori in ragione inversa dei quadrati delle aree dei fori medesimi. Supponendo poi che il livello dell'acqua nel canale si alzi della quantità $\Delta\beta$, si alzerà anche il livello dell'acqua nel bottino davanti al modulo di una quantità $\Delta\beta$ e si avrà

$$a^2 m^2 \Delta\alpha = m'^2 b^2 (\Delta\beta - \Delta\alpha)$$

e quindi $\Delta\alpha = \frac{m'^2 b^2}{m^2 a^2 + m'^2 b^2} \Delta\beta$; sarà dunque $\Delta\alpha$ sempre minore di $\Delta\beta$ e tanto minore quanto $m'^2 b^2$ è minore di $m^2 a^2 + m'^2 b^2$.

Si ha inoltre

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m'^2 b^2}{m^2 a^2 + m'^2 b^2}$$

dunque $\frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$ ossia $\Delta\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \Delta\beta$ dalla quale si ricava $\Delta\alpha : \Delta\beta :: \alpha : \beta$ cioè il teorema del Brunacci che *gli aumenti delle altezze dei due livelli sono proporzionali alle stesse altezze, qualunque sia la relazione tra le grandezze dei fori.* Qui si potrebbe poi facilmente dimostrare collo stesso Brunacci che per questo conto di diminuire sempre più le variazioni del pelo d'acqua non vi sarebbe vantaggio alcuno a dividere l'edifizio magistrale in più di due camere per mezzo di più diaframmi facendo vedere il calcolo che si conservano sempre le stesse surriferite relazioni fra gli incrementi delle altezze dell'acqua.

Del resto se noi consideriamo la suddescritta proprietà come un bel pregio della maniera di dispensare le acque usitata in Lombardia, e se crediamo l'edifizio magistrale assai ingegnoso, fatto riflesso ai tempi in cui fu immaginato non solo nella mira di dar sempre all'acqua con un eguale ed uniforme battente un medesimo grado di velocità, ma anche nello scopo succennato di rendere la dispensa dell'acqua possibilmente indipendente dalle variazioni del suo pelo nel canale e nel fiume, per il che lo riteniamo il miglior metodo di dispensa in confronto di tutti gli altri finora usati; pure conveniamo pienamente dal canto nostro col sig. Tadini, che esso metodo benchè ingegnoso contiene ancora molti difetti e che nella generalità de' casi sarebbe di gran lunga preferibile all'edifizio magistrale l'uso del nuovo *regolatore a moto lineare* da lui stesso suggerito e proposto, della qual cosa però ci riserviamo di trattare più di proposito nel libro che avrà per titolo: *Storia dei progetti e delle opere per l'irrigazione del Milanese.*

APPENDICE

Si avvicinava già al suo termine la stampa della presente Memoria, quando col mezzo dell'articolo inserito in Maggio di quest'anno 1829 nel N.° CLXI del Giornale intitolato: *Biblioteca Italiana*, abbiamo saputo esistere la *Nota intorno al movimento delle acque a due coordinate di Maurizio Brighenti*, pubblicata a Pesaro nello scorso anno 1828 dalla Tipografia di Annessio Nobili. Ci venne quindi voglia di conoscere il contenuto dell'anzidetta Nota, che ci siamo procurato. In essa abbiamo poi trovato che il sig. Brighenti, parlando del moto dell'acqua in un piano ossia a due coordinate, promove qualche dubbio sull'esattezza delle soluzioni fino allora venute a di lui cognizione, e segnatamente egli non si mostra persuaso della legittimità e sussistenza del metodo con cui, nella soluzione dovuta ai signori Tadini e Venturoli sul moto dell'acqua circoscritta da pareti di data figura, si procede col soccorso dell'analisi a determinare la forma delle due funzioni arbitrarie che entrano nell'espressione degli elementi del moto di ciascuna particella fluida. Ora questo metodo si fonda appunto sulla considerazione della figura delle linee estreme che terminano il velo fluido; ed è facile il comprendere che qualora esso non fosse veramente esatto e rigoroso per il motivo addotto dal sig. Brighenti, le succennate soluzioni del Lagrange, del Poisson, del Mossotti ec., non esclusa quella suesposta nel Capo III, che sono tutte del pari fondate sullo stesso metodo di determinazione delle funzioni arbitrarie, sarebbero pure insussistenti, e quindi come tali da rigettarsi o per ritornare all'ipotesi del *moto lineare* introdotta nelle opere del Bernoulli, del D'Alembert ec., e finora usata dagli idraulici italiani; oppure per ricorrere all'ipotesi del moto secondo qualche altra legge e direzione assunta *a priori*, come propone il sig. Brighenti. Ci sembra però che sia in errore il sig. Brighenti laddove opina non potersi dal valore delle funzioni arbitrarie determinato per le pareti del velo fluido rimontare al valore delle dette funzioni arbitrarie per un punto qualunque. Diffatti coll'eseguire questo passaggio nel modo da noi di sopra indicato non si viene già a supporre che un punto qualunque del velo fluido debba descrivere, come ogni particella ade-

rente alle pareti, una linea della stessa *indole* delle pareti medesime, perchè nel caso di nna sola data parete rettilinea si trova invece essere una curva di 3.° ordine la trajettoria d'un punto qualunque; e quindi nel caso delle due pareti rettilinee risolto da Venturoli non si fa una petizione di principio, ossia *non si trova per necessità*, come dice il sig. Brighenti, *che la trajettoria d'ogni molecola sia una retta colla stessa origine della parete rettilinea supposta;* nè per conseguenza si può dire col sig. Brighenti *che ciò vale lo stesso che sostituire all' ipotesi bernoulliana quest' altra, che ogni punto fluido debba descrivere una retta, ed usare le equazioni generali del movimento de' fluidi introducendovi una legge stabilita* a priori. Non ci pare poi meglio fondato il calcolo istituito dallo stesso Autore su tali principj per trovare similmente che l'equazione della trajettoria delle molecole d'acqua nel caso delle pareti circolari sarebbe quella d'un circolo concentrico alle stesse pareti. Ci basti adunque il far qui rimarcare, in conferma del dubbio esternato dagli estensori del suddetto articolo della *Biblioteca Italiana*, quanto non ha osservato il sig. Brighenti che cioè, se i signori Venturoli e Tadini nelle loro rispettive soluzioni hanno usato e messo dei valori particolari nelle funzioni arbitrarie per arrivare alla loro determinazione, essi hanno seguito in ciò il solito metodo che serve anche per la determinazione delle costanti arbitrarie portate dall' integrazione, ma non hanno però preteso che quei *valori particolari* di dette funzioni debbano soddisfare a tutti i punti della massa fluida, come suppone l'Autore della Nota confondendo il *valore* colla *forma* delle funzioni.

È poi da alcuni giorni soltanto che ebbimo la compiacenza di poter vedere le due nuove ed interessanti Memorie idrauliche pubblicate dal distinto italiano sig. Professore Bidone. L'una di esse si è quella che porta per titolo: *Expériences sur la forme et sur la direction des veines et des courans d'eau lancés par diverses ouvertures. Turin* 1829 *de l'Imprimerie Royale*, e che si trova inserita nel tomo XXXIV delle Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino. L'altra si è quella contenuta nello stesso volume è intitolata: *Mémoire pour la détermination théorique de la section contractée des veines fluides.* In fatti colla prima Memoria il sig. Bidone si è accinto a determinare per esperienza due importanti elementi nella misura della così chiamata *contrazione della vena*, quali sono la forma e la direzione dei getti d'acqua, altrimenti detti vene sgorganti; e non v'ha dubbio che mercè la varietà e l'estensione di queste esperienze del sig. Bidone (congiuntamente

a quelle dell' illustre idraulico esperimentatore Michelotti) state eseguite nel celebre Stabilimento Idraulico dell' Università di Torino con tutti i dettagli desiderabili, potremo d' or innanzi concepire idee più esatte e più conformi alla verità sul conto de' fenomeni che presenta l' efflusso dell' acqua dai vasi, dai tubi e dai canali. Possiamo adesso sperare inoltre che le stesse esperienze abbiano da contribuire ai progressi dell' idrodinamica, i quali in realtà dipendono non solo dal perfezionamento dell' analisi matematica, ma anche dall' esattezza dei *dati* forniti dall' osservazione. D' altronde colla seconda delle suddette Memorie il sig. Bidone ha già effettuato quanto da noi si era in certo modo preveduto e ritenuto possibile (*Vedasi di sopra l' annotazione a piedi della pag.* 68). Così avviene che non solo l' effetto della contrazion della vena potrà essere più esattamente conosciuto e misurato in ordine alla dispensa dell' acqua a giusta misura nelle applicazioni della pratica e ciò dietro il primo luminoso esempio fornitoci in questo genere di ricerche dal sig. Tadini nella seconda parte della sullodata sua Opera *Del movimento e della misura* ec., ma quell' interessante fenomeno dell' efflusso dell' acqua verrà inoltre ad essere spiegato in teoria sì nel caso delle due pareti rettilinee considerato per la prima volta dallo stesso sig. Tadini, che nell' altro caso risolto dal sig. Venturoli sul moto dell' acqua contenuta in un vaso conico e da noi di sopra contemplato. Finalmente avvertiamo che volendo conoscere tutti i tentativi fatti sinora dai geometri per introdurre nel calcolo rigoroso del movimento dei fluidi l' elemento della resistenza o viscosità delle particelle fluide non bisogna scordarsi di consultare gli articoli e le memorie del valente Ingegnere sig. Navier, di cui si fa cenno nel Giornale *Bulletin Universel des Sciences et Industrie* ec. del sig. de Férrusac per gli anni 1826 e successivi.

FINE.

La presente Memoria trovasi vendibile in Milano anche presso la Ditta
ANTONIO FORTUNATO STELLA e FIGLI.

A
B
C
A
D
B